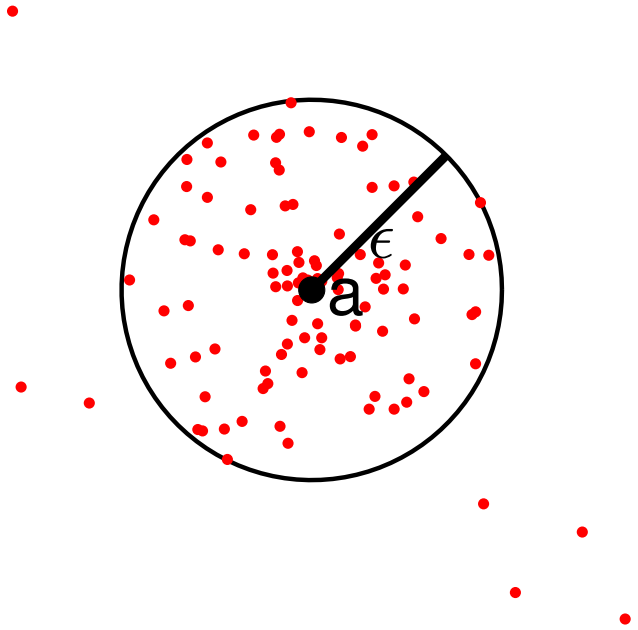
Analysis 1

Armin Iske
www.math.uni-hamburg.de/home/iske



Literatur

- Otto Forster: Analysis 1. 12. Auflage. SpringerSpektrum, 2016.
- Konrad Königsberger: Analysis 1. Springer-Verlag, 2004.
- Walter Rudin: Analysis. 4. Auflage. Oldenbourg Verlag, 2009.
- Wolfgang Walter: Analysis 1. Springer-Verlag, 2004.

Analysis 1:

Differential- und Integralrechnung

von reell-wertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen:

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \in [a, b] \longmapsto f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

- **Erste Vorbereitungen:** Aussagen, Mengen, Zahlenbereiche (von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{R}$).
- **Beweistechniken:**
  Gegenbeispiel, Widerspruch, Fallunterscheidung, vollständige Induktion.
- **Mathematische Funktionen**
- **Metrische und normierte Räume**
- **Konvergenz von Folgen und Reihen**
- **Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen**
- **Integration**
- ...

1 Metrische Räume

1.1 Grundbegriffe und erste Resultate

In diesem Abschnitt führen wir einen *Abstandsbegriff* auf Mengen ein.

Definition: Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt Metrik auf X, wenn für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften gelten.

(M1) $d(x, y) \geq 0$ (Positivität);

(M2) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit)

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Eine nichtleere Menge X mit einer Metrik d heißt metrischer Raum, (X, d).
Ein Element $x \in X$ wird im Folgenden ebenso als Punkt in X bezeichnet. ◯

Bemerkung: Auf einer nichtleeren Menge X lassen sich im Allgemeinen *verschiedene* Metriken erklären. Für verschiedene Metriken d und d' auf X bekommt man *verschiedene* metrische Räume (X, d) und (X, d'). □

Vereinbarung: Ab sofort verwenden wir die Notation $\mathbb{K}$ für den Körper der reellen Zahlen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *oder* für den Körper der komplexen Zahlen, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beispiel: Die Menge $X = \mathbb{K}$ ist mit der Betragsfunktion

$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{K}$$

ein metrischer Raum, für den wir die Notation $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ verwenden. ♢

Vorbereitung: Für das nächste Beispiel erinnern wir an die Notation des $\mathbb{R}^n$, für $n \in \mathbb{N}$, die wir problemlos auf den $\mathbb{C}^n$ übertragen können bzw. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bekommen wir den **n-dimensionalen Raum**

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_k \in \mathbb{K} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n\}.$$

□

Metriken auf dem n-dimensionalen Raum $\mathbb{K}^n$.

Ziel: Wir wollen den $\mathbb{K}^n$ mit einer Metrik ausstatten. Naheliegend ist dabei die Verwendung des bekannten euklidischen Abstands

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

Allerdings gibt es mehrere Metriken auf dem $\mathbb{K}^n$. Hierzu präsentieren wir das folgende Beispiel, das den Fall des euklidische Abstands d_2 umfasst.

Beispiel: Für $p \in \mathbb{N}$ ist der n-dimensionale Raum $X = \mathbb{K}^n$ mit der p-Metrik

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^n$$

ein metrischer Raum, für den wir die Notation $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ verwenden.
Für den Spezialfall $p = 2$ bezeichnen wir die 2-Metrik d_2 als euklidisch. ♢

Beispiele für weitere Metriken.

Beispiel: Der n-dimensionale Raum $X = \mathbb{K}^n$ ist mit der ∞-Metrik

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j| \qquad \text{für } x,y \in \mathbb{K}^n$$

ein metrischer Raum, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dabei bezeichnet das Maximum

$$\|x\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j| = \max\{|x_j| : 1 \le j \le n\}$$

den Wert des betragsgrößten Eintrags in $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. ♢

Beispiel: Für eine *beliebige* nichtleere Menge X ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für } x,y \in X$$

eine Metrik auf X, die als diskrete Metrik bezeichnet wird.
Somit ist (X,d) für *jede* nichtleere Menge X ein metrischer Raum. ♢

Die Viereckungleichung.

Satz: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gilt die* Viereckungleichung

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') \qquad \text{für alle } x, x', y, y' \in X.$$

Beweis: Für $x, x', y, y' \in X$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x') + d(x',y) \\ &\leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \end{aligned}$$

nach zweifacher Anwendung der Dreiecksungleichung. Somit bekommen wir

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Vertauscht man nun die Rollen von x und x' sowie von y und y', so folgt

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x',x) + d(y',y) = d(x,x') + d(y,y')$$

und damit insgesamt die behauptete Abschätzung der Viereckungleichung. ■

1.2 Metrische Räume und ihre Topologie

Definition: Für einen metrischen Raum (X, d), für $x \in X$ und $r > 0$ heißt

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$$

die offene Kugel in X mit Mittelpunkt x und Radius r. Entsprechend heißt

$$B[x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \subset X$$

die abgeschlossene Kugel in X mit Mittelpunkt x und Radius r. ◯

Beispiel: In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist, für $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, die *Kugel* $B(x, r)$ ein offenes Intervall, und $B[x, r]$ ist ein abgeschlossenes Intervall:

$$B(x, r) = (x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad B[x, r] = [x - r, x + r] \subset \mathbb{R}.$$

♢

Beispiel: Für die diskrete Metrik d auf X enthält die offene Kugel $B(x, r)$, für $x \in X$ und $r < 1$ *nur* den Punkt x, d.h. $B(x, r) = \{x\}$ für alle $r < 1$. Für $r \geq 1$ enthält $B(x, r)$ *alle* Punkte von X, d.h. $B(x, r) = X$ für alle $r \geq 1$. ♢

Der Begriff der offenen Menge.

Bemerkung: Für einen metrischen Raum (X, d) und eine nichtleere Teilmenge $U \subset X$ ist (U, d) ein metrischer Raum. Die Metrik d wird dabei auf U genauso wie auf X (wir sagen: *in kanonischer Weise*) definiert. In diesem Fall wird die Metrik d auf U als `induzierte Metrik` bezeichnet. □

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt `offen` in X, wenn es zu jedem $x \in U$ eine offene Kugel $B(x, r)$, mit $r > 0$, gibt, die in U enthalten ist, d.h. $B(x, r) \subset U$. ◯

Beispiel: Offene Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$, für $a < b$, sind offen, denn: Für jedes $x \in (a, b)$ sind die Abstände $d_a := |x - a|$ und $d_b := |x - b|$ jeweils positiv, d.h. $d_a, d_b > 0$. Nehmen wir nun das Minimum $d_{min} := \min\{d_a, d_b\} > 0$, so gilt $B(x, d_{min}) \subset (a, b)$, d.h $r = d_{min} > 0$ ist hier der gesuchte Radius. ♢

Bemerkung: Beachte, dass der Radius r (in der Definition und im Beispiel) von x abhängt. Wir notieren diese Abhängigkeit von x gelegentlich mit $r \equiv r(x)$. □

Offene Kugeln sind tatsächlich offene Mengen!

Vorbemerkung: Wir erinnern an die Einführung der Begriffe *offene Kugel* und *offene Menge*: Für *offene Kugeln* hatten wir die Notation $B(x,r)$ eingeführt. Der Begriff *offene Mengen* wurde dann formal definiert für Teilmengen $U \subset X$.
Da jede offene Kugel $B(x,r) \subset X$ eine Teilmenge von X ist, stellt sich nun die (berechtigte!) Frage, ob $B(x,r)$, für $x \in X$ und $r > 0$, eine offene Menge in X ist.

Dies führt uns sofort zu dem folgenden wichtigen Ergebnis.

Satz: *Offene Kugeln sind offen.*

Beweis: Betrachte für $x_0 \in X$ und $r > 0$ die offene Kugel $B(x_0,r) \subset X$. Für $x \in B(x_0,r)$ gilt $d(x,x_0) < r$. Wir zeigen nun die Inklusion

$$B(x, r - d(x,x_0)) \subset B(x_0,r).$$

Dazu sei $y \in B(x, r-d(x,x_0))$, d.h. $d(x,y) < r - d(x,x_0)$. In diesem Fall gilt

$$d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y) < d(x_0,x) + r - d(x,x_0) = r,$$

d.h. $d(x_0,y) < r$ und daher gilt $y \in B(x_0,r)$. ■

Nun endlich zur Topologie metrischer Räume.

Wir können nun die folgende wichtige Aussage über offene Mengen beweisen.

Satz: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann sind* X *und die leere Menge* $\emptyset$ *offen in* X*. Weiterhin ist die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen sowie die Schnittmenge endlich vieler offener Mengen offen in* X*.*

Bevor wir den Beweis des Satzes führen, notieren noch wir folgende

Bemerkung: Der obige Satz liefert eine Charakterisierung für eine Topologie: Ist eine Menge X mit einer Metrik d versehen, so liefert dies einen metrischen Raum (X, d), auf dem man offene (Teil-)Mengen betrachten kann und weiterhin (durch Schnitte und Vereinigungen) offene Mengensysteme bilden kann.

Fazit: Metrische Räume besitzen somit *in kanonischer Weise* eine Topologie. □

Schließlich zum Beweis des Satzes.

Beweis: Die Menge X ist offen, denn für jedes $x \in X$ und $r > 0$ gilt $B(x,r) \subset X$. Die leere Menge $\emptyset$ enhält keine Punkte (d.h. nichts zu zeigen), somit ist $\emptyset$ offen.

Für *endlich* viele offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_n \subset X$ betrachten wir nun den Schnitt

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k \subset X.$$

Für $x \in U$ gilt $x \in U_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Da U_k offen ist, gibt es für jedes $1 \leq k \leq n$ einen Radius $r_k > 0$ mit $B(x,r_k) \subset U_k$. Für $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k > 0$ gilt somit $B(x,r) \subset U_k$ für alle $1 \leq k \leq n$, und somit $B(x,r) \subset U$.

Seien schließlich $U_k \subset U$, $k \in I$, offen (für eine Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$). Betrachte die Vereinigung

$$U = \bigcup_{k \in I} U_k \subset X.$$

Dann gibt es für $x \in U$ einen Index $k \in I$ mit $x \in U_k$. Da U_k offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(x,r) \subset U_k \subset U$, und somit gilt $B(x,r) \subset U$. ■

1.3 Konvergente Folgen

Definition: Sei X eine nichtleere Menge. Unter einer Folge in X verstehen wir eine Abbildung $n \longmapsto X$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in X$ zuordnet. Dabei wird x_n als n-tes Folgeglied bezeichnet. Wir verwenden die Notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur Bezeichnung einer Folge in X. ◯

Triviales Beispiel: Für $x \in X$ ist $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge. ♢

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, aus einem metrischen Raum (X, d) heißt konvergent, falls es für ein $x \in X$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_n, x) < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Dabei heißt x Grenzelement (oder Grenzwert) der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{oder} \qquad x_n \longrightarrow x \text{ für } n \to \infty.$$

Nicht konvergente Folgen heißen divergent. ◯

Grenzelemente sind stets eindeutig!

Tatsächlich kann es zu einer konvergenten Folge nur ein Grenzelement geben:

Satz: *Das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Angenommen, für $x, y \in X$ gilt $x_n \longrightarrow x$ und $x_n \longrightarrow y$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und somit $d(x,y) = 0$, d.h. $x = y$. ■

Hier noch schnell drei nützliche Definitionen zu *Berührungspunkten*.

Definition: Sei $U \subset X$. Dann heißt $x \in X$ `Berührungspunkt` von U, falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U gibt mit $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. ◯

Definition: Die Menge $\overline{U} \subset X$ aller Berührungspunkt von $U \subset X$ heißt `abgeschlossene Hülle` (kurz: `Abschluss`) von U in X. ◯

Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt `abgeschlossen` in X, falls U alle ihre Berührungspunkte enthält, d.h. falls $U = \overline{U}$. ◯

Charakterisierung abgeschlossener Mengen.

Satz: *Eine Teilmenge* $U \subset X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn die Differenzmenge* $X \setminus U$ *offen ist.*

Beweis: "$\Longleftarrow$"**:** Sei U abgeschlossen, und sei $x \in X \setminus U$. Im Folgenden zeigen wir, dass es dann ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $B(x, 1/n) \subset X \setminus U$, womit $X \setminus U$ offen wäre. Angenommen, es gebe kein solches $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt $B(x, 1/n) \cap U \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $d(x, x_n) < 1/n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$, d.h. x ist Berührungspunkt von U. Daraus folgt $x \in U$ (wegen U abgeschlossen), im Widerspruch zur Annahme.

"$\Longrightarrow$"**:** Sei $X \setminus U$ offen, und sei x Berührungspunkt von U. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap U$. In diesem Fall kann x nicht in der offenen Menge $X \setminus U$ liegen, sondern x liegt notwendigerweise in U, $x \in U$. Somit enthält U alle ihrer Berührungspunkte, d.h. U ist abgeschlossen. ■

Abgeschlossene Kugeln sind stets abgeschlossen!

Wir erinnern an unsere Vorbemerkung zur Offenheit von offenen Kugeln. Genauso stellt sich die (berechtigte!) Frage nach der Abgeschlossenheit von abgeschlossenen Kugeln. Wir beantworten diese Frage wie folgt positiv.

Satz: *Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen.*

Beweis: Betrachte für $x_0 \in X$ und $r > 0$ die abgeschlossene Kugel $B[x_0, r] \subset X$. Nun sei $x \in X \setminus B[x_0, r]$, und somit $d(x, x_0) > r$. Wir zeigen die Inklusion

$$B(x, d(x, x_0) - r) \subset X \setminus B[x_0, r],$$

womit $X \setminus B[x_0, r]$ offen wäre (und $B[x_0, r]$ wäre dann abgeschlossen).

Hierzu sei $y \in B(x, d(x, x_0) - r)$, d.h. $d(y, x) < d(x, x_0) - r$, womit

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - d(x, x_0) + r = r$$

und somit $d(y, x_0) > r$, d.h. $y \notin B[x_0, r]$ bzw. $y \in X \setminus B[x_0, r]$. ■

Konvergente Folgen sind stets beschränkt

Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt `beschränkt` in X, falls U in einer abgeschlossenen Kugel von X enthalten ist. ◯

Beispiel: Für $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, ist das reelle Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ beschränkt, genauso die Intervalle $(a, b], [a, b), [a, b]$. Die Intervalle $(-\infty, a)$ bzw. $(-\infty, a]$ und (b, ∞) bzw. $[b, \infty)$ sind allerdings *nicht* beschränkt. ♢

Satz: *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X, so dass $x_n \longrightarrow x \in X$, für $n \to \infty$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < 1$ für alle $n \geq N$. Für

$$r = \max\left\{1, \max_{n\leq N} d(x, x_n)\right\}$$

gilt $d(x, x_n) \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit liegt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B[x, r]$. ■

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy[a]-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

○

Satz: *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzelement $x \in X$, d.h. $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Somit gilt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

■

[a] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), französischer Mathematiker

Aber nicht jede Cauchy-Folge konvergiert!

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage im vorigen Satz ist im Allgemeinen falsch, d.h. nicht jede Cauchy-Folge konvergiert in X. In $X = \mathbb{Q}$ gibt es zum Beispiel Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen mit irrationalem Grenzwert. Ganz konkret: Wir können die positive Lösung $\sqrt{2}$ der Gleichung $x^2 = 2$ durch eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen $x_n \in \mathbb{Q}$ beliebig gut annähern. Der Grenzwert $\sqrt{2}$ dieser Folge liegt allerdings nicht in $\mathbb{Q}$, sondern es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und somit konvergiert die Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* in $\mathbb{Q}$. Wir werden dieses Beispiel bei der nächsten Gelegenheit im Detail diskutieren. □

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge aus X bezüglich d gegen ein Grenzelement in X konvergiert. ◯

Beispiel: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der Metrik $|\cdot|$ einen vollständigen metrischen Raum, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Auch dies müssen wir später genauer diskutieren. ♢

Beispiel: Jede nichtleere Menge X bildet mit der diskreten Metrik d einen vollständigen metrischen Raum, (X, d). ♢

2 Reelle und komplexe Zahlenfolgen

2.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Konvergenz und Divergenz von konkreten Folgen in den reellen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und in den komplexen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dabei verwenden wir jeweils die Betragsmetrik $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty)$, definiert durch

$$d(x, y) := |x - y| \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{K}.$$

Wir weisen für die Betragsmetrik zuerst die Eigenschaften **(M1)-(M4)** nach:

(M1) Die Betragsmetrik ist *positiv*, denn es gilt $|x - y| \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$.

(M2) Die Betragsmetrik ist *definit*, denn aus $|x - y| = 0$ folgt $x = y$.

(M3) Die Betragsmetrik ist *symmetrisch* mit $|x - y| = |y - x|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$.

Schließlich zur Dreiecksungleichung.

Wir zeigen zuerst die *Dreiecksungleichung der Betragsnorm* $|\cdot|$, d.h.

$$|x+y| \le |x|+|y| \qquad \text{für alle } x,y \in K.$$

Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$*:* Zunächst gilt $\pm x \le |x|$ und $\pm y \le |y|$, womit $\pm(x+y) \le |x|+|y|$, und daraus folgt $|x+y| \le |x|+|y|$.

Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$*:* Für $z,w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\cdot(\overline{z+w}) = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} \\ &= |z|^2+z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}+|w|^2 = |z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2 \\ &\le |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2 = |z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

womit gilt $|z+w| \le |z|+|w|$.

Zu **(M4)**: Die *Dreiecksungleichung der Betragsmetrik* d folgt daraus sofort mit

$$d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \le |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y)$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{K}$. ■

Die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort die *umgekehrte Dreiecksungleichung*.

Folgerung: Es gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|x+y| \geq |x| - |y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}.$$

Beweis: Für $u := x+y$, $v := -y$ gilt die Dreiecksungleichung $|u+v| \leq |u| + |v|$, d.h.

$$|x| = |(x+y)+(-y)| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|,$$

und daraus folgt sofort die Behauptung (nach Addition von $-|y|$). ■

Bemerkung: Die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt ebenso im metrischen Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ oder $p = \infty$, d.h.

$$\|x+y\|_p \geq \|x\|_p - \|y\|_p \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Dies lässt sich genauso wie oben beweisen. □

Das Archimedische Axiom.

Zur Erinnerung: Im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die *Anordnungsaxiome* sowie das *Vollständigkeitsaxiom* erfüllt.

Folgerung 1: In $\mathbb{R}$ gilt das Supremumsaxiom, wonach jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen eine *kleinste obere Schranke* (Supremum) besitzt, d.h. für alle $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, gilt die Implikation

$$(\exists u \in \mathbb{R}\colon\ (\forall a \in A\ :\ a \leq u)) \Longrightarrow$$
$$(\exists s \in \mathbb{R}\colon\ ((\forall a \in A\ :\ a \leq s) \wedge (\forall t \in \mathbb{R}\ :\ (t < s \Longrightarrow \exists a \in A\colon t < a)))).$$

Aus dem Supremumsaxiom folgt das *Archimedische Axiom*.

Folgerung 2: In $\mathbb{R}$ ist das Archimedische[a] Axiom erfüllt: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass

$$nx > y.$$

Beweis von Folgerung 2: Aufgabe des Tages. □

[a] Archimedes von Syrakus (ca. 287-212 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Physiker

Beweis des Supremumsaxioms.

Beweis von Folgerung 1: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Bezeichne nun mit U die Menge aller oberen Schranken für A, also

$$U := \{u \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq u\}.$$

Da A nach oben beschränkt ist, ist die Menge U nicht leer.

Außerdem ist U nach oben abgeschlossen, denn wenn eine reelle Zahl u' größer ist als eine obere Schranke u zu A, dann ist u' ebenso eine obere Schranke zu A, da dann insbesondere für alle $a \in A$ gilt $a \leq u < u'$. Zusammenfassend gilt:

$$\forall u' \in \mathbb{R}\, \forall u \in U : (u' > u \Longrightarrow u' \in U).$$

Setze nun $L := \mathbb{R} \setminus U$, womit $\mathbb{R} = L \cup U$. Dann ist L ebenso nicht leer, denn da A nicht leer ist, gibt es mindestens ein Element $a \in A$ und $a - 1$ ist keine obere Schranke zu A, und somit liegt $a - 1$ in U. Außerdem gilt für alle $\ell \in L$ und $u \in U$, dass $\ell < u$: Gäbe es $\ell \in L$ und $u \in U$ mit $\ell \geq u$, dann wäre ℓ nach obiger Überlegung eine obere Schranke zu A, läge damit in U, aber $U \cap L = \emptyset$.

Fortsetzung des Beweises.

Nach dem Dedekindschen Vollständigkeitsaxiom gibt es eine eindeutige Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$, so dass $s \geq \ell$ für alle $\ell \in L$ und $s \leq u$ für alle $u \in U$.

Nun bleibt zu zeigen, dass s eine obere Schranke für A ist, also dass $s \in U$.

Dies beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen, s sei keine obere Schranke zu A, so dass $s \in L$. Dann gibt es ein $a \in A$, so dass $a > s$. Betrachte nun

$$t := \frac{a+s}{2},$$

das arithmetische Mittel von a und s. Dann gilt $a > t > s$ und t ist damit keine obere Schranke für A, womit $t \in L$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn nach Definition von s gilt $s \geq \ell$ für alle $\ell \in L$. Andererseits gilt aber $t > s$ und $t \in L$. Damit ist bewiesen, dass $s \in U$.

Fazit: s ist das gesuchte Supremum zu A.

Damit ist das Supremumsaxiom bewiesen. ■

Zur Konvergenz reeller und komplexer Folgen.

Im Folgenden notieren wir mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon)$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n \geq N(\varepsilon) : a_n \in B(a,\varepsilon))\,.$$

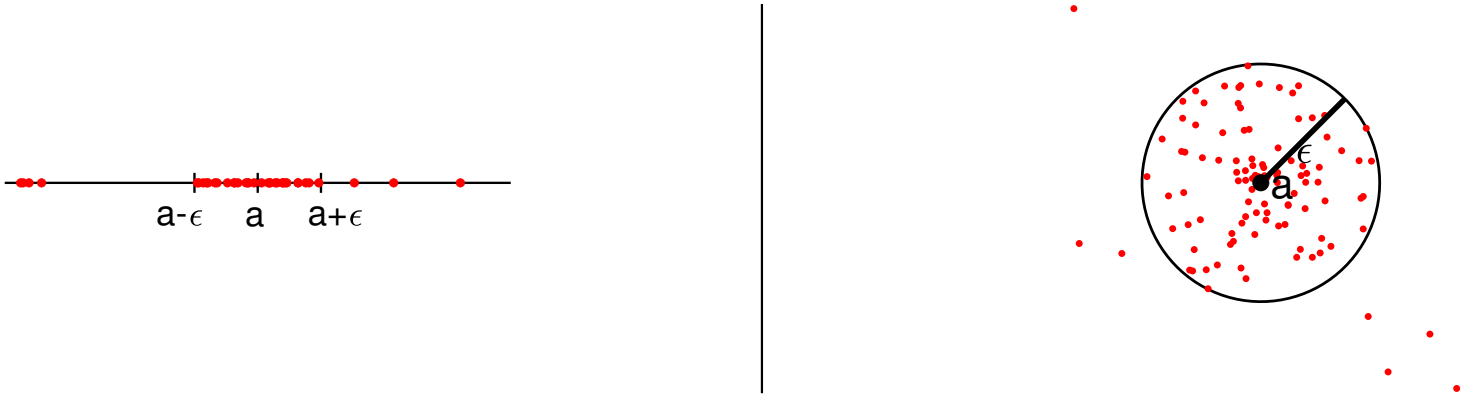
○

Bemerkung: Für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist die *offene Kugel* $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ist *offene Kugel*

$$B(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$, mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $\varepsilon > 0$. □

Bemerkungen zur Konvergenz.



Bemerkung: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{K}$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* Folgeglieder $a_n \in \mathbb{K}$ in der Kugel $B(a, \varepsilon)$ und höchstens *endlich viele* Folgeglieder $a_n \in \mathbb{K}$ außerhalb von $B(a, \varepsilon)$ liegen. □

Bemerkung: Das Konvergenzverhalten einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bleibt *invariant* unter Abänderung *endlich vieler* Folgeglieder a_n. Daher kann die Analyse der Konvergenz (oder Divergenz) einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne Einschränkung auf die Folge $(a_n)_{n\geq N}$, für beliebiges $N \in \mathbb{N}$, reduziert werden. □

Teilfolgen und Umordnungen von Folgen.

Definition: Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◯

Definition: Sei $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *bijektiv*, d.h. p ist *injektiv* und *surjektiv* (d.h. zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p(n) = m$), so dass p eine *Permutation* der natürlichen Zahlen ist. Dann heißt $(a_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◯

Satz: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gilt:*

(a) Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

(b) Jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann liegen nach Umordnung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weiterhin unendlich viele Folgeglieder in $B(a, \varepsilon)$ und endlich viele außerhalb von $B(a, \varepsilon)$, womit (b) gezeigt ist. Genauso liegen nach Auswahl einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Folgeglieder der Teilfolge in $B(a, \varepsilon)$, und endlich viele außerhalb von $B(a, \varepsilon)$, womit (a) ebenso gezeigt ist. ■

2.2 Reelle Zahlenfolgen

Wir diskutieren nun konkrete Beispiele für Folgen reeller Zahlen.

Triviales Beispiel: Die *konstante Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n \equiv a$, für ein $a \in \mathbb{R}$, konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, denn es gilt $|a_n - a| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ♢

Definition: Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a = 0$ heißt Nullfolge. ◯

Proposition: *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Zahlen* $a_n = 1/n$ *bildet eine Nullfolge.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Archimedischen Axiom (für $x = \varepsilon$ und $y = 1$) ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \epsilon$. Mit den Anordnungsaxiomen gilt $1/n < 1/N$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$, und somit $1/n < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$. Daher konvergiert die Folge der Zahlen $a_n = 1/n$ gegen Null mit

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n > N.$$

■

Majoranten reeller Zahlenfolgen.

Folgerung: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $M \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq 1/n$ für alle $n \geq M$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \max\{N, M\} \in \mathbb{N},$$

d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird von der Nullfolge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorisiert. ■

Folgerung: *Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\left(n^{-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k \geq n$ und somit $n^{-k} \leq n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit wird die Folge $\left(n^{-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorisiert. ■

Proposition: *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlen $a_n = \frac{n}{2^n}$ bildet eine Nullfolge.*

Beweis: Für $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$ (dies zeigt man leicht per Induktion nach n), womit $\frac{n^2}{2^n} \leq 1$ bzw. $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, d.h. $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Majorante von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Die alternierende Folge.

Wir hatten gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht, wie das folgende Gegenbeispiel einer Folge mit *alternierendem* Vorzeichen zeigt.

Proposition: *Die* alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist divergent.*

Beweis: Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$, für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt daraus sofort der Widerspruch

$$\begin{aligned} 2 = |a_{n+1} - a_n| &= |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

■

Weitere Beispiele reeller Zahlenfolgen.

Proposition: *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Zahlen* $a_n = \frac{n}{n+1}$ *konvergiert gegen Eins.*

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

■

Proposition: *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *der* Fibonacci-Zahlen, *rekursiv definiert durch* $a_0 := 1$, $a_1 := 1$ *und* $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$, *für* $n \in \mathbb{N}$, *divergiert.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq n$, wie man leicht per Induktion nach n zeigt. Somit ist die Folge der Fibonacci-Zahlen nicht beschränkt. Konvergente Folgen sind allerdings stets beschränkt, und daher kann die Folge der Fibonacci-Zahlen nicht konvergieren. ■

Die Bernoullische[a] Ungleichung.

Zur Vorbereitung des nächsten Beispiels benötigen wir zuerst folgende Resultate.

Satz (Die Bernoullische Ungleichung): Für $x \geq -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch vollständige Induktion: Sei $x \geq -1$.

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ gilt die Ungleichung mit $(1+x)^1 \geq 1+x$.
- *Induktionsvoraussetzung*: Die Ungleichung gelte für $n \in \mathbb{N}$.
- *Induktionsschluss* $(n \to n+1)$: Mit $1+x \geq 0$ gilt

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

nach Verwendung der Induktionsvoraussetzung in der ersten Ungleichung. ■

[a] Jakob I Bernoulli (1655-1705), Schweizer Mathematiker und Physiker

Folgerungen aus der Bernoullischen Ungleichung.

Folgerung: *Sei* $b > 1$. *Dann gibt es zu jedem* $K > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $b^n > K$.

Beweis: Für $x := b - 1$ gilt $x > 0$ und somit

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

nach Anwendung der Bernoullischen Ungleichung. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > K - 1$. Für dieses n gilt $b^n > K$. ■

Folgerung: *Sei* $0 < b < 1$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $b^n < \varepsilon$.

Beweis: Für $0 < b < 1$ gilt $1/b > 1$. Somit gibt es nach der vorigen Folgerung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(1/b)^n > 1/\varepsilon$, womit $b^n < \varepsilon$. ■

Geometrische Folgen reeller Zahlen.

Definition: Für $b \in \mathbb{R}$ wird die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlen $a_n := b^n$, für $n \in \mathbb{N}$, als geometrische Folge zur Basis b bezeichnet. ◯

Die Konvergenz der geometrischen Folge hängt von ihrer Basis ab.

Proposition: *Sei* $b \in \mathbb{R}$. *Dann ist die geometrische Folge* $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) eine Nullfolge, falls $|b| < 1$.

(b) konstant mit Grenzwert Eins für $b = 1$.

(c) divergent für $b = -1$.

(d) divergent falls $|b| > 1$.

Beweis: Die Fälle (b), (c) hatten wir bereits diskutiert. Zum Beweis von (a): Nach der vorigen Folgerung gibt es zu $|b| < 1$ und $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N < \varepsilon$. Daraus folgt $|b^n - 0| = |b^n| = |b|^n \leq |b|^N < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zum Beweis von (d): Nach der vorletzten Folgerung ist die Folge $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|b| > 1$ unbeschränkt und somit divergent. ■

2.3 Verknüpfungen von Zahlenfolgen

In diesem Abschnitt erklären wir Verknüpfungen von Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$.

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen in* $\mathbb{K}$. *Dann konvergiert die Summe* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definiert durch*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

sowie die skalare Multiplikation $\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lambda \in \mathbb{K}$, *definiert durch*

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

und es gilt
(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
(b) $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.

Bemerkung: Die Menge aller konvergenten Folgen in $\mathbb{K}$ bildet mit der Addition '$+$' und der skalaren Multiplikation '$\lambda\cdot$' einen linearen Raum (Vektorraum). Die algebraische Struktur von linearen Räumen wird ausführlich in der linearen Algebra diskutiert. Daher wollen wir dies hier nicht weiter vertiefen. □

Zum Beweis des Satzes.

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{K}$ die Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und } b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_a \equiv N_a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und ein $N_b \equiv N_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_a \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_b.$$

(a): Für $n \geq \max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_a(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$|\lambda \cdot a_n - \lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial. ■

Multiplikation und Division in Zahlenfolgen.

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen in* $\mathbb{K}$*. Dann:*

(a) konvergiert das Produkt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definiert durch*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

und es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$.

(b) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge ist, so konvergiert ebenso der Quotient, wobei gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Bemerkung: Die Quotienten in $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind nur definiert für $b_n \neq 0$. Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall ist der Grenzwert in (b) wohldefiniert. □

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{K}$ die Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und } b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_a \equiv N_a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und ein $N_b \equiv N_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_a \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_b.$$

Im folgenden Beweis setzen wir $N \equiv N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\} \in \mathbb{N}$.

(a): Die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C_a > 0$ mit $|a_n| \leq C_a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt nun

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a \cdot b$.

Fortsetzung des Beweises.

(b): Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, aber keine Nullfolge.

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Weiterhin gilt $b \neq 0$ für den Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Für $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für alle $n \geq N_b \equiv N_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(1/b_n)_{n\geq N}$ gegen $1/b$ konvergiert.

Zusammen mit dem Resultat in (a) folgt daraus die Konvergenz des Produkts

$$(a_n)_{n\geq N} \cdot (1/b_n)_{n\geq N} = (a_n/b_n)_{n\geq N}$$

mit Grenzwert $a \cdot 1/b = a/b$. ■

3 Von den rationalen zu den reellen Zahlen

Erinnerung: Im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt das

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872) **:**

Sei $\mathbb{R} = L \cup R$ zerlegt in nichtleere Mengen $L, R \neq \emptyset$ mit $\forall\, x \in L,\, y \in R : x < y$.

Dann gibt es genau eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall\, x \in L,\, y \in R : \quad x \leq s \leq y.$$

Erinnerung: Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt das Supremumsaxiom, wonach jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen eine *kleinste obere Schranke* (Supremum) besitzt, d.h. für alle $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, gilt die Implikation

$$(\exists u \in \mathbb{R}\colon\ (\forall a \in A\ :\ a \leq u)) \Longrightarrow$$
$$(\exists s \in \mathbb{R}\colon\ ((\forall a \in A\ :\ a \leq s) \wedge (\forall t \in \mathbb{R}\ :\ (t < s \Longrightarrow \exists a \in A\colon t < a)))).$$

Zurück zum Begriff der Cauchy-Folge.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n, m \geq N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n, m \geq N(\varepsilon) : a_n - a_m \in B(\varepsilon))\,,$$

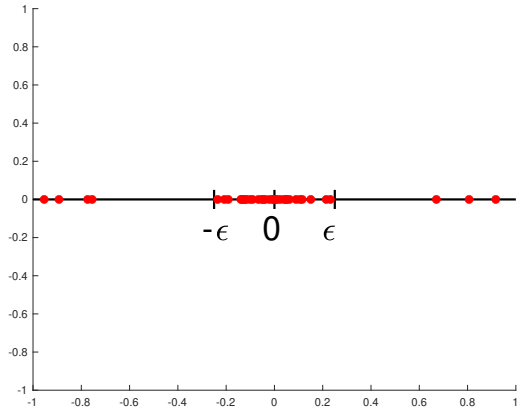
wobei $B(\epsilon) := B(0, \varepsilon)$ die offene Kugel um Null mit Radius $\varepsilon > 0$ bezeichnet. ◯

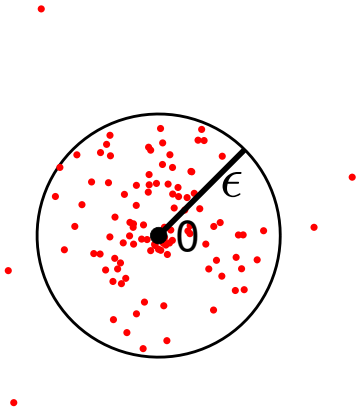
Bemerkung: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die *offene Kugel* $B(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ ein um Null symmetrisches offenes reelles Intervall. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist *offene Kugel*

$$B(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt Null und Radius $\varepsilon > 0$. □

Bemerkungen zu Cauchy-Folgen.





Bemerkung: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* Differenzen $a_n - a_m \in \mathbb{K}$ in der Kugel $B(\varepsilon)$ und höchstens *endlich viele* Differenzen $a_n - a_m \in \mathbb{K}$ außerhalb von $B(\varepsilon)$ liegen. □

Bemerkung: Die Cauchy-Eigenschaft einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bleibt *invariant* unter Abänderung *endlich vieler* Folgeglieder a_n. Wir notieren die Cauchy-Eigenschaft für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kurz mit

$$\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad |a_n - a_m| \longrightarrow 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

□

Zur Konvergenz von Cauchy-Folgen.

Wir erinnern an zwei wichtige Resultate aus der Theorie der metrischen Räume. Dabei bezeichnet (X, d) einen metrischen Raum.

Satz: Jede konvergente Folge in (X, d) ist eine Cauchy-Folge. □

Satz: Cauchy-Folgen sind im Allgemeinen nicht konvergent in (X, d). Nur in vollständigen metrischen Räumen (X, d) sind alle Cauchy-Folgen konvergent. □

Wir diskutieren nun zwei Beispiele für *unvollständige* metrische Räume (X, d).

Beispiel: Betrachte $(X, |\cdot|)$ mit $X := (0, 1]$. Dann ist die Nullfolge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die aber *nicht* in $(0, 1]$ konvergiert, denn: $1/n \longrightarrow 0 \notin (0, 1]$. ♢

Beispiel: Sei $X = \mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei *rekursiv* definiert durch $x_1 := 1$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $x_n \longrightarrow \sqrt{2}$, für $n \to \infty$, und somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch nicht in $\mathbb{Q}$.
Fazit: Der metrische Raum $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist *nicht* vollständig. ♢

Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen.

Definition: Für eine nichtleere Menge X wird eine *Relation* $R \subset X \times X$ als Äquivalenzrelation auf X bezeichnet, falls gilt:

- $(x, x) \in R$ (Reflexivität);
- $(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$ (Symmetrie);
- $((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Longrightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität).

Wir notieren kurz $x \sim y$ statt $(x, y) \in R$ und in diesem Fall werden x und y als äquivalent bezüglich R bezeichnet. Weiterhin bezeichnet

$$[x] := \{y \in X \,|\, x \sim y\} \qquad \text{für } x \in X$$

die Äquivalenzklasse von x bezüglich R.
Jedes Element einer Äquivalenzklasse $[x]$ heißt Repräsentant von $[x]$. ◯

Bemerkung: Eine Äquivalenzrelation R auf X liefert eine Partition von X in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen. □

Nun endlich zur Konstruktion der reellen Zahlen.

Ausgangspunkt: Der *unvollständige* metrische Raum $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Weiterhin bezeichne $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, d.h.

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}(\mathbb{Q}) \quad := \quad & \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{Q}) \wedge \\ & (\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0,\ \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Verschiedene Cauchy-Folgen können denselben Grenzwert haben.

Zur weiteren Konstruktion der reellen Zahlen bilden wir Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ mit der Äquivalenzrelation

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0,$$

und so identifizieren wir Cauchy-Folgen in $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ miteinander.

Bemerkung: Die Relation $\sim$ ist auf $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ eine Äquivalenzrelation, d.h. $\sim$ ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*, zerlegt $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ somit in Äquivalenzklassen. □

Zur weiteren Konstruktion der reellen Zahlen.

- Die Menge aller Äquivalenzklassen $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\mathsf{CF}(\mathbb{Q})$ nennen wir Menge der reellen Zahlen,

$$\mathbb{R} := \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{CF}(\mathbb{Q})\}.$$

- Mit der Einbettung $q \longmapsto [(q)_{n\in\mathbb{N}}]$ fassen wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auf.
- Wir definieren die Addition $'+'$ und die Multiplikation $' \cdot '$ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &:= [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &:= [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}]. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Addition $'+'$ und die Multiplikation $' \cdot '$ sind in $\mathbb{R}$ jeweils *abgeschlossen*, d.h. für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{CF}(\mathbb{Q})$ gilt

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{CF}(\mathbb{Q}) \qquad \text{und} \qquad (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{CF}(\mathbb{Q}).$$

Weiterhin sind die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ jeweils *wohldefiniert*. □

Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen.

- Die Null in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ wird von der konstanten Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentiert.
- Die Eins in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ wird von der konstanten Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentiert.
- Das additive Inverse zu $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.
- Das multiplikative Inverse zu $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq 0$ ist $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ mit

$$y_n := \begin{cases} 1/x_n & \text{für } x_n \neq 0, \\ 0 & \text{für } x_n = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Für $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq 0$ gilt $x_n = 0$ nur für *endlich* viele $n \in \mathbb{N}$, denn anderenfalls gäbe es eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ mit Grenzwert Null, womit $x_n \longrightarrow 0$, für $n \to \infty$. Dies steht im Widerspruch zu $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq 0$. □

Zwischenfazit: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet einen Körper, der die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält. Die Körperaxiome der Addition und der Multiplikation sowie das Distributivgesetz lassen sich elementar nachweisen. □

Zur Anordnung der reellen Zahlen.

Bemerkung: Auf $\mathbb{R}$ lässt sich nun eine Ordnung definieren mit

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n > \varepsilon.$$

für *positive* Elemente (genauso für negative) und mit den Ordnungsrelationen

$$\begin{aligned}
[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &\Longleftrightarrow [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] > 0 \\
[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \geq [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &\Longleftrightarrow [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] > 0 \text{ oder } [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = 0 \\
[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &\Longleftrightarrow [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] < 0 \\
[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &\Longleftrightarrow [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] < 0 \text{ oder } [(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = 0.
\end{aligned}$$

Weiteres Zwischenfazit: Mit dieser Ordnung ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Die Anordnungsaxiome weist man für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ elementar nach. □

So führen wir eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ein.

Ausgangspunkt: Wir statten $\mathbb{R}$ mit einer Metrik d aus, definiert durch

$$d([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) := [(|x_n - y_n|)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Bemerkung: Die Metrik d ist mit der Betragsmetrik $|\cdot|$ in $\mathbb{Q}$ *verträglich*, d.h.

$$|p - q| = d([(p)_{n\in\mathbb{N}}], [(q)_{n\in\mathbb{N}}]) \qquad \text{für alle } p, q \in \mathbb{Q}.$$

□

Schließlich zur Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Satz: Seien $x^k = [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}]$, für $k \in \mathbb{N}$, Elemente einer Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0,\ \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall k, \ell \geq N : d([(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_n^\ell)_{n\in\mathbb{N}}]) < (\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann konvergiert $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $x := [(x_j^j)_{j\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir unterteilen den Beweis wie folgt in zwei Schritte.

Schritt 1: Wir zeigen $x \in \mathbb{R}$, d.h. $(x_j^j)_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einerseits für die Cauchy-Folge $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$, $k \in \mathbb{N}$, ein $N_1 \equiv N_1(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x_j^k - x_k^k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } j,k \geq N_1.$$

Andererseits gibt es wegen der Cauchy-Eigenschaft von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ein $N_2 \equiv N_2(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x_j^j - x_j^k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } j,k \geq N_2.$$

Für $N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt mit der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\left|x_j^j - x_k^k\right| \leq \left|x_j^j - x_j^k\right| + \left|x_j^k - x_k^k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für alle } j,k \geq N.$$

Weiter zum Beweis der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Schritt 2: Wir zeigen die Konvergenz $x^k \longrightarrow x$ für $k \to \infty$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$. Weiterhin sei $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ wie in Schritt 1 (nur für ε statt $\varepsilon/2$). Dann gilt für $N := N_2(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$d\left(\left[(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right], x\right) = \left[\left(\left|x_n^k - x_n^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}\right] < \left[(\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}\right] \qquad \text{für alle } k, n \geq N,$$

denn mit der Cauchy-Eigenschaft von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es für alle $k, \ell \geq N$ ein $n_{k,\ell} \in \mathbb{N}$ mit $|x_n^k - x_n^\ell| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_{k,\ell}$ und damit gilt

$$\left|x_n^k - x_n^n\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \max\{N, n_{k,\ell}\}.$$

Insgesamt ist damit die Konvergenz $x^k \longrightarrow x$, für $k \to \infty$, gezeigt. ■

Schlussbemerkung: Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist der *kleinste vollständige* metrische Raum, der $\mathbb{Q}$ enthält (und erfüllt die Anordnungsaxiome). Die Methode, mit der wir den metrischen Raum der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, d)$ aus dem metrischen Raum der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ konstruiert haben, heißt Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Wir notieren dies kurz mit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

4 Kompaktheit

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein allgemeiner metrischer Raum. Zunächst erinnern wir an wichtige Begriffe und Resultate und fügen weitere hinzu.

Definition: Ein Element $u \in U$ heißt `innerer Punkt` von $U \subset X$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(u, \varepsilon) \subset U$. Das `Innere` von U (die Menge der inneren Punkte von U) bezeichnen wir mit $\mathring{U}$. Die Menge $\partial U := \overline{U} \setminus \mathring{U}$ heißt `Rand` von U. ◯

Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt `offen` in X, falls U nur aus inneren Punkten besteht, d.h. falls $U = \mathring{U}$. ◯

Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt `abgeschlossen` in X, falls U alle ihre Berührungspunkte enthält, d.h. falls $U = \overline{U}$. ◯

Satz: Für eine Teilmenge $U \subset X$ gilt die Äquivalenz

$$U \text{ abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \setminus U \text{ offen.}$$

□

Zentrale Begriffe und Aussagen zu Folgen.

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- `konvergiert` in (X, d) gegen $x \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n \geq N(\varepsilon) : d(x_n, x) < \varepsilon)\,.$$

- heißt `Cauchy-Folge` in (X, d) falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (\forall n, m \geq N(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

○

Satz: *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.* □

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heißt `vollständig`, falls jede Cauchy-Folge aus X bezüglich d gegen ein Grenzelement in X konvergiert. ○

Definition: Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ `Teilfolge` von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ○

Definition: Ein $x \in X$ heißt `Häufungspunkt` einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d), falls für jedes $\varepsilon > 0$ in $B(x, \varepsilon)$ unendlich viele Folgeglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen. ○

Zur Vorbereitung ein Resultat zur Vollständigkeit.

Satz: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) *Vollständige Teilmengen von* (X, d) *sind abgeschlossen.*

(b) *Falls* (X, d) *vollständig ist, dann auch jede abgeschlossene Teilmenge in* X*.*

Beweis: (a): Für $U \subset X$ sei (U, d) vollständig. Weiterhin sei $x \in X$ ein Berührungspunkt von U, d.h. es gibt eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $u_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und daher ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit von U liegt das (eindeutige) Grenzelement x in U, $x \in U$. Somit ist U abgeschlossen.

(b): Sei (X, d) vollständig, und $U \subset X$ abgeschlossene Teilmenge in X. Weiterhin sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in U, somit ebenso Cauchy-Folge in X. Wegen der Vollständigkeit von X konvergiert die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen ein $x \in X$. Als Grenzelement der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U ist x Berührungspunkt von U. Wegen der Abgeschlossenheit von U liegt x in U. Somit ist U vollständig. ■

Nun zum Begriff der Kompaktheit.

Definition: Eine Teilmenge U eines metrischen Raums heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von U eine *endliche* Teilüberdeckung enthält, d.h. falls es zu jeder Familie $(V_j)_{j\in J}$ von offenen Mengen mit $U \subset \bigcup_{j\in J} V_j$ *endlich* viele $V_{j_1}, \ldots, V_{j_n}$ gibt mit

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}.$$

○

Beispiel: Das halboffene Einheitsintervall $(0,1]$ ist (als Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) *nicht* kompakt, denn für die offenen Intervalle $V_j = (1/j, 1+1/j)$, $j \in \mathbb{N}$, gilt

$$(0,1] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j,$$

aber es gibt keine *endliche* Teilüberdeckung von $(0,1]$ aus $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$. ♢

Weitere Beispiele für (nicht) kompakte Mengen.

Triviales Beispiel: Die leere Menge ist kompakt. ♢

Beispiel: Endliche Mengen $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset X$, für $n \in \mathbb{N}$, sind kompakt, denn für eine offene Überdeckung von U, mit offenen Mengen V_j, $j \in J$, ist jeder Punkt $u_k \in U$, $1 \leq k \leq n$, in einer der offenen Mengen V_j, $j \in J$, enthalten, d.h. es gilt $u_k \in V_{j_k}$, für ein $j_k \in J$. Damit ist

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}.$$

eine *endliche* Teilüberdeckung von U. ♢

Beispiel: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ liegen *nicht* kompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, denn die offenen Mengen $(j - 1/2, j + 1/2)$, für $j \in \mathbb{Z}$, liefern eine offene Überdeckung von $\mathbb{Z}$. Allerdings lässt sich daraus keine endliche Teilüberdeckung auswählen. ♢

Nun zur Folgenkompaktheit.

Definition: Eine Teilmenge U eines metrischen Raums heißt `folgenkompakt`, falls jede Folge von Elementen aus U eine in U konvergente Teilfolge enthält. ◯

Beispiel: Endliche Mengen $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, sind folgenkompakt, denn für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kommt mindestens eines der Elemente aus U unendlich oft vor. Daher gibt es eine Teilfolge in $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in U. ♢

Beispiel: Das halboffene Einheitsintervall $(0, 1]$ ist *nicht* folgenkompakt, denn die Nullfolge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge in $(0, 1]$. ♢

Beispiel: Für (X, d) mit der *diskreten Metrik* d gilt für $U \subset X$ die Äquivalenz

$$U \text{ folgenkompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad U \text{ endlich.}$$

Die Implikation „$\Longleftarrow$“ haben wir bereits verifiziert. Sei nun U folgenkompakt. Angenommen, U sei unendlich. Weiterhin sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $u_n \neq u_m$, und somit $d(u_n, u_m) = 1$, für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Dann enthält $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Cauchy-Folge, somit auch *keine* konvergente Teilfolge. ♢

Schließlich zum Begriff der Präkompaktheit.

Definition: Eine Teilmenge U eines metrischen Raums heißt präkompakt (bzw. total beschränkt), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $u_1, \ldots, u_n$ in U gibt mit

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, \varepsilon),$$

d.h. zu jedem $u \in U$ gibt es ein $u_k \in U$, $1 \leq k \leq n$, mit $d(u, u_k) < \varepsilon$. ◯

Beispiel: Das Intervall $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist präkompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: Betrachte dazu für $\varepsilon > 0$ die Punkte

$$x_j := \frac{j}{n} \in (0, 1] \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

mit äquidistanten Abständen $x_{j+1} - x_j \equiv 1/n < \varepsilon$, für $n > 1/\varepsilon$. Dann überdecken die Intervalle $B(x_j, \varepsilon)$, für $j = 1, 2, \ldots, n$, das Intervall $(0, 1]$, d.h.

$$(0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon).$$

Folgenkompaktheit impliziert Präkompaktheit.

Satz: *Jede folgenkompakte Menge ist präkompakt.*

Beweis: Angenommen, U sei folgenkompakt, aber nicht präkompakt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für *keine* endliche Folge von Punkten $u_1, \ldots, u_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$, die Vereinigung der Kugeln $B(u_j, \varepsilon)$ die Menge U überdeckt, d.h. für beliebige Punkte $u_1, \ldots, u_n \in U$ gibt es stets ein $u_{n+1} \in U$ mit $d(u_{n+1}, u_j) \geq \varepsilon$ für alle $1 \leq j \leq n$. Per Induktion können wir somit eine Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in U konstruieren mit

$$d(u_\ell, u_k) \geq \varepsilon \qquad \text{für } n < k < \ell.$$

Eine solche Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kann allerdings keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von U. ■

Schließlich eine wichtige Äquivalenzaussage.

Satz: *Für eine Menge* $\mathfrak{U}$ *sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $\mathfrak{U}$ *ist kompakt;*

(b) $\mathfrak{U}$ *ist folgenkompakt;*

(c) $\mathfrak{U}$ *ist präkompakt und vollständig.*

Beweis: Wir zeigen die Implikationen $(\mathfrak{a}) \Longrightarrow (\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}) \Longrightarrow (\mathfrak{c})$, und $(\mathfrak{c}) \Longrightarrow (\mathfrak{a})$.

$(\mathfrak{b}) \Longrightarrow (\mathfrak{c})$**:** Sei $\mathfrak{U}$ folgenkompakt. Dann ist $\mathfrak{U}$ nach vorigem Satz präkompakt.

Wir beweisen somit nur noch die Vollständigkeit von $\mathfrak{U}$. Hierzu sei $(\mathfrak{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{U}$. Wegen der Folgenkompaktheit von $\mathfrak{U}$ besitzt $(\mathfrak{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathfrak{U}$ konvergente Teilfolge mit Grenzelement aus $\mathfrak{U}$. Andererseits besitzt jede Cauchy-Folge höchstens einen Häufungspunkt. Damit ist $\mathfrak{U}$ vollständig.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sei U kompakt. Angenommen, U sei nicht folgenkompakt. Dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Zu jedem $u \in U$ gibt es in diesem Fall eine Kugel $B_u = B(u, r_u)$, so dass B_u nur endlich viele Elemente aus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Allerdings gilt die Inklusion

$$U \subset \bigcup_{u\in U} B_u,$$

und da U kompakt ist, gibt es endlich viele Elemente $v_1, \ldots, v_n \in U$ mit

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{v_k},$$

wobei jede Kugel B_{v_k} nur endlich viele Elemente der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Dann enthält U jedoch nur endlich viele Elemente aus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Sei U vollständig und präkompakt.

Weiterhin sei $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von U, so dass

$$U \subset \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Wir definieren nun das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \left\{ B \subset U \,\middle|\, B \subset \bigcup_{j\in I} V_j \Longrightarrow I \text{ unendlich, wobei } I \subset J \right\}$$

und zeigen, dass $U \notin \mathcal{B}$.

Da U präkompakt ist, gibt es für $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B(u_j, \varepsilon)$$

mit Elementen $u_1, \ldots, u_{n_\varepsilon} \in U$.

Weiterhin gibt es für *jedes* $B \in \mathcal{B}$ ein $j \equiv j(\varepsilon)$ mit $B(u_j, \varepsilon) \cap B \in \mathcal{B}$.

Angenommen $U \in \mathcal{B}$. Dann können wir induktiv, startend mit $B_1 := U \in \mathcal{B}$, Punkte $u_k \in U$ mit Radien $\varepsilon_k := 1/k$ und Mengen

$$B_k := B(u_k, \varepsilon_k) \cap B_{k-1} \in \mathcal{B} \qquad \text{für } k \geq 2,$$

konstruieren, so dass $B_k \subset B_{k-1} \subset \cdots \subset B_2 \subset B_1 = U$.

Wählt man nun Punkte $v_n \in B_n$, so gilt

$$d(v_k, v_\ell) \leq d(v_k, u_k) + d(u_k, v_\ell) \leq 2\varepsilon_k \qquad \text{für } k \leq \ell,$$

womit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in U ist. Da U vollständig ist, konvergiert die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U, d.h. es gibt ein $v \in U$ mit $v_n \longrightarrow v$ für $n \to \infty$. Da $v \in V_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$, folgt

$$B_k \subset B(u_k, \varepsilon_k) \subset B(v_k, 2\varepsilon_k) \subset B(v, 2\varepsilon_k + d(v_k, v)) \subset V_{j_0}$$

für hinreichend großes k, d.h. es gilt $B_k \notin \mathcal{B}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur obigen Konstruktion von B_k. ■

Folgerung: Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt.

Beweis: Sei U kompakt.

Wir zeigen zuerst die Abgeschlossenheit von U: Hierzu sei x Berührungspunkt von U. Dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $u_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Da U folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzelement $u \in U$, d.h. $u_{n_k} \longrightarrow u$ für $k \to \infty$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzelements folgt $x = u$, d.h. $x \in U$, und somit ist U abgeschlossen.

Wir zeigen die Beschränkheit von U: Die kompakte Menge U ist folgenkompakt und somit präkompakt. Daher gibt es zu $\varepsilon = 1$ Punkte $u_1, \ldots, u_n \in U$ mit

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, 1),$$

d.h. für $u \in U$ gilt $u \in B(u_k, 1)$, für ein $1 \le k \le n$. Damit gilt schließlich

$$d(u_1, u) \le d(u_1, u_k) + d(u_k, u) < r - 1 + 1 = r \quad \text{für } r = 1 + \max_{2\le k\le n} d(u_1, u_k).$$

Somit gilt die Inklusion $U \subset B(u_1, r)$, d.h. U ist beschränkt. ■

Zusammenfassung in einem Diagramm.

Für eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) gelten folgende Äquivalenzen und Implikationen.

$$U \text{ folgenkompakt} \iff U \text{ kompakt} \iff U \text{ präkompakt und vollständig}$$

$$\Downarrow$$

$$U \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beispiele: Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Die Intervalle $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) sind präkompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Die unbeschränkten Intervalle $[0, \infty)$ und $(-\infty, 0]$ sind zwar abgeschlossen, aber nicht kompakt. ♢

Schlussbemerkung: In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind Teilmengen genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind. □

5 Konvergenzaussagen zu reellen Folgen

Zur Vorbereitung: Was wissen wir bereits über reelle Folgen?

Proposition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* Folgeglieder $a_n \in \mathbb{R}$ in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und höchstens *endlich viele* $a_n \in \mathbb{R}$ außerhalb von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. □

Folgerung: Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist beschränkt. □

Proposition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert genau dann in $\mathbb{R}$, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. □

Definition: Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ `Teilfolge` von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ○

Bemerkung: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen a. □

Monotone Folgen reeller Zahlen.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

$$\begin{aligned} \texttt{monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n \leq a_m \\ \texttt{streng monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n < a_m \\ \texttt{nach oben beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C \end{aligned}$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\begin{aligned} \texttt{monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n \geq a_m \\ \texttt{streng monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n > a_m \\ \texttt{nach unten beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \geq C \end{aligned}$$

○

Proposition und Definition: Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine *kleinste obere Schranke* (`Supremum`), notiert mit $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, und eine *größte untere Schranke* (`Infimum`), notiert mit $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

Das Prinzip der Intervallschachtelung.

Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallend in* $\mathbb{R}$ *mit*

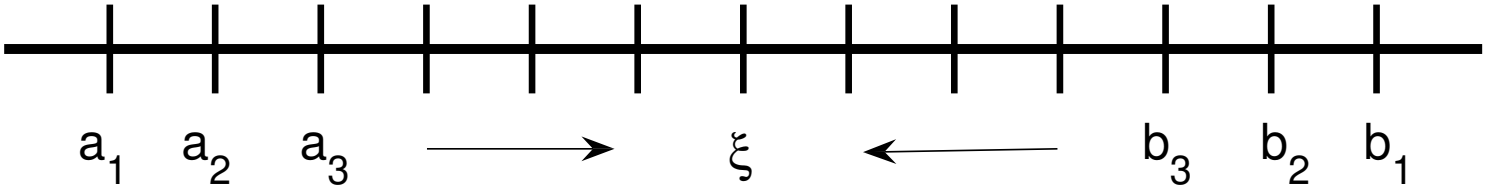
$$a_n \leq b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind beide Folgen konvergent. Gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein* $\xi \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$



Beweis: liefern wir später als Schlussfolgerung in diesem Abschnitt. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (Bolzano[a]-Weierstraß[b]):

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $a_n \in [A, B]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte folgende Bisektionsmethode.

$A_1 := A;$
$B_1 := B;$
FOR $k = 1, 2, 3, \ldots$
    $C := (A_k + B_k)/2;$
    IF $\{n \mid a_n \in [A_k, C]\}$ unendlich THEN
        $A_{k+1} := A_k; \quad B_{k+1} := C;$
    ELSE
        $A_{k+1} := C; \quad B_{k+1} := B_k;$

[a] Bernard Bolzano (1781-1848), katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker
[b] Karl Weierstrass (1815-1897), deutscher Mathematiker

Die Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $A_k \leq B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $B_k - A_k \longrightarrow 0$, für $k \to \infty$, so dass gilt

$$\xi = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Konstruiere nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- FOR $k = 2, 3, 4, \ldots$
  wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$, für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißt der Grenzwert von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ○

Bemerkungen zu Häufungspunkten.

Bemerkung: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) gilt die Implikation

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt genau einen Häufungspunkt.}$$

Insbesondere besitzt jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ genau einen Häufungspunkt.

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens zwei Häufungspunkt besitzt, so divergiert die Folge. □

Beispiel: Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die Häufungspunkte ± 1. ♢

Definition: Für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen wird der *kleinste Häufungspunkt* als `Limes inferior` und der *größte Häufungspunkt* als `Limes superior` bezeichnet, jeweils kurz notiert mit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf a_n &:= \lim_{n\to\infty} \left(\inf \{a_k \,|\, k \geq n\}\right) \\ \lim_{n\to\infty} \sup a_n &:= \lim_{n\to\infty} \left(\sup \{a_k \,|\, k \geq n\}\right). \end{aligned}$$

○

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt ein längst bekanntes Resultat.

Satz: *Der metrische Raum* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *ist vollständig.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\epsilon)$, so dass gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N| \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so dass $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ist. Dann gilt für $m, n_k \geq N(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - a| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \\ &\leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Beschränkte monotone Folgen konvergieren.

Satz: *Jede beschränkte monotone Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen konvergiert.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, d.h. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir zeigen nun, dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Setze $N := n_{k_0}$. Dann gibt es zu jedem $n \geq N$ ein $k \geq k_0$ mit $n_k \leq n < n_{k+1}$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend oder monoton fallend, so folgt daraus

$$a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{n_k} \geq a_n \geq a_{n_{k+1}}.$$

In jedem dieser beiden Fälle gilt schließlich

$$|a_n - a| \leq \max\{|a_{n_k} - a|, |a_{n_{k+1}} - a|\} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N$$

wegen $a_{n_k} - a \leq a_n - a \leq a_{n_{k+1}} - a$ bzw. $a_{n_k} - a \geq a_n - a \geq a_{n_{k+1}} - a$. ■

Beschränkte monotone Folgen konvergieren.

Satz: *Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen konvergiert mit Grenzwert* $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit $s - \varepsilon < a_N \leq s$.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

■

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt für nach unten beschränkte monoton fallende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, allerdings mit dem Infimum $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} > -\infty$ als Grenzwert. Den Beweis führt man analog. □

Ungleichung geometrisches/arithmetisches Mittel.

Definition: Für nicht-negative reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

geometrisches Mittel und

$$A(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 + \ldots + x_n)/n$$

arithmetisches Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. ○

Proposition: Für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$. □

Folgerung: Unter allen nicht-negativen reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ *fester* Summe $s \equiv n \cdot A(x_1, \ldots, x_n)$ wird das Produkt $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ eindeutig maximiert mit $x_1 = \ldots = x_n = s/n$. □

Die Eulersche Zahl e. Wir untersuchen die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$e_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Hierzu zerlegen wir die Folgeglieder e_n in ein Produkt $e_n = a_n \cdot b_n$, wobei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Folgerung zum geometrisch-arithmetischen Mittel gilt die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \text{für } x \geq -n,\ x \neq 0,$$

denn falls man die linke Seite mit der Eins multipliziert, so ist die Summe der $n+1$ (nichtnegativen) Faktoren auf beiden Seiten gleich $n+1+x$.

Mit dem Fall $x = 1$ erkennt man, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst. Genauso wächst die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton, mit $x = -1$.

Die Folgeglieder b_{n+1} können wir nun für $n \in \mathbb{N}$ darstellen mit

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$$

Somit ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$c_n := b_{n+1}^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

streng monoton fallend, und weiterhin gilt $a_n < c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, z.B. durch c_1, und damit konvergiert. Der Grenzwert

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Eulersche Zahl**, wobei $e \approx 2.718281828459045\ldots$

Genauso gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = e$, somit $\lim_{n\to\infty} b_n = 1/e$, womit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = e \cdot 1/e = 1.$$

6 Konvergenz von Reihen

Ziel: Wir wollen die Elemente $a_n \in \mathbb{K}$ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ aufsummieren, d.h. wir betrachten die *unendliche Summe*

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Eine solche Summe nennen wir eine Reihe. □

Beispiel zur Motivation: Wir stehen 2m von einer Wand entfernt und gehen schrittweise auf die Wand zu. Zuerst gehen wir 1m voran, also die Hälfte der Strecke zur Wand. Im zweiten Schritt gehen wir erneut um die Hälfte der Strecke zur Wand voran, also um 0.5m usw. Wir stellen uns nun folgende Fragen.

- Berühren wir die Wand? Nein, jedenfalls nicht nach endlich vielen Schritten.
- Welche Strecke (in Meter) legen wir nach $n \in \mathbb{N}$ Schritten zurück?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Frage: Haben Reihen irgendwas mit Folgen zu tun?

Definition: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ wird die *endliche* Summe

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

als `n-te Partialsumme` bezeichnet. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt `Reihe`. Falls die Reihe konvergiert, d.h. falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert, so notieren wir

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

für den Grenzwert $s \in \mathbb{K}$ der Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◯

Antwort: Ja, Reihen sind Folgen von Partialsummen. Damit können wir bekannte Resultate zur Konvergenz von Folgen auf Reihen übertragen. □

Zurück zu dem Beispiel mit der Wand.

Bemerkung: In dem Beispiel mit der Wand ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

die n-te Partialsumme. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist *streng monoton steigend*, denn:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiterhin ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *nach oben beschränkt*, denn es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. die Zahl 2 ist eine obere Schranke der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Mit Erinnerung an ein Resultat für Folgen: Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Frage: Können wir den Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmen? ♢

Ein Resultat zur Vorbereitung.

Proposition: Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^m - y^m = (x-y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}.$$

Beweis: Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $m \in N$ gilt

$$\begin{aligned}
(x-y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1} &= x \cdot \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1} - y \cdot \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1} \\
&= x^m + \sum_{j=2}^{m} x^{m-j+1} y^{j-1} - \sum_{j=1}^{m-1} x^{m-j} y^j - y^m \\
&= x^m + \sum_{j=1}^{m-1} x^{m-j} y^j - \sum_{j=1}^{m-1} x^{m-j} y^j - y^m \\
&= x^m - y^m.
\end{aligned}$$

■

Die geometrische Reihe.

Folgerung: Betrachte für $q \in \mathbb{K}$ die geometrische Folge $(q^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

für die zugehörigen Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der geometrischen Reihe.

Beweis: Mit dem Spezialfall $m = n+1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{K}$ folgt die behauptete Darstellung aus der vorigen Proposition. ■

Folgerung: Für $q \in \mathbb{K}$ gelten folgende Aussagen für die geometrischen Reihe.

(a) Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe mit Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Für $|q| \geq 1$ divergiert die geometrische Reihe. ■

Für das Beispiel mit der Wand gilt $q = 1/2$, somit ist $s = 2$ der Grenzwert. ♢

Das Cauchysche Konvergenzkriterium für Reihen.

Satz: *Sei $a_n \in \mathbb{K}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$. Dann gelten für die zugehörige Reihe, d.h. für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, folgende Aussagen.*

(a) Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ \forall m, n \geq N\colon \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Beweis: Aussage (a) folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen, hier mit

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \text{für } m, n \geq N, \text{ wobei } m \geq n.$$

Aussage (b) folgt aus Aussage (a) für den Spezialfall $m = n + 1$. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, denn für $m \geq n$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{m} 1 = \frac{m-n}{m} \longrightarrow 1 \quad \text{für } m \to \infty,$$

und somit ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für alle $\varepsilon < 1$ verletzt. ♢

Bemerkung: Die Summanden $1/k$ der harmonischen Reihe bilden eine Nullfolge $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$. Das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt, dass die Aussage (b) im vorigen Satz lediglich eine *notwendige*, aber keine *hinreichende* Bedingung der Konvergenz liefert, d.h. falls die Summanden $a_k \in \mathbb{K}$ einer Reihe eine Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ bilden, so folgt daraus *nicht* notwendigerweise die Konvergenz der zugehörigen Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die harmonische Reihe ist also ein Gegenbeispiel. □

Das Konvergenzkriterium von Leibniz[a].

Das folgende Leibnizsche Konvergenzkriterium liefert eine wichtige Aussage zur Konvergenz von *alternierende Reihen*. Dabei geht es um Reihen, deren reellen Summanden ein *alternierendes* Vorzeichen besitzen.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine reelle Folge nicht-negativer Folgeglieder* $a_k \geq 0$, *für* $k \in \mathbb{N}_0$, *die eine monoton fallende Nullfolge bilden. Dann konvergiert die* alternierende Reihe *der Summanden* $(-1)^k a_k$, *für* $k \in \mathbb{N}_0$, *und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

[a] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), deutscher Philosoph, Mathematiker, Jurist

Beweis: Für die (endlichen) Partialsummen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gelten die folgenden Aussagen (jeweils für $n \in \mathbb{N}$ bzw. für $n \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \end{aligned}$$

womit

$$v_n - u_n = a_{2n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Daher bilden die Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \leq \quad v_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

■

Die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2) = 0.69314\dots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe.

Den hier angegebenen Grenzwert $\ln(2)$ berechnen wir später.

Wir bemerken, dass „ln“ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. ♢

Eine weitere Konvergenzaussage für Reihen.

Satz: *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$*, deren zugehörigen Reihen jeweils konvergieren. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) Die zugehörige Reihe der Folge $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(b) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ *konvergiert die zugehörige Reihe der Folge* $(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis: siehe die entsprechende Aussage für konvergente Folgen in $\mathbb{K}$.
Die Aussage des Satzes ist somit nur ein Spezialfall. ■

Bemerkung: Die Menge aller konvergenten Reihen in $\mathbb{K}$ bildet mit der Addition '$+$' und der skalaren Multiplikation '$\lambda\cdot$' einen `linearen Raum` (`Vektorraum`). □

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt die zugehörige Reihe `absolut konvergent`, falls die Reihe von $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

○

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert. ♢

Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen.

Wir beginnen mit einem *notwendigen* und *hinreichenden* Kriterium für die absolute Konvergenz von Reihen. Das folgende Resultat folgt sofort aus einer entsprechenden Aussage für reelle Folgen.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$*. Dann konvergiert die zugehörige Reihe absolut genau dann, wenn die Folge der Partialsummen von* $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist, d.h.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen von $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. ■

Das Majorantenkriterium liefert eine *hinreichende* Bedingung für die absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$. *Falls* $|a_k| \leq b_k$, *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *und falls die zu* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gehörige Reihe konvergiert, so konvergiert die zu* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gehörige Reihe absolut, d.h.*

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

Beweis: Mit $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist die zu $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe sogar absolut konvergent. Nach dem vorigen Resultat ist die Folge der Partialsummen von $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass die Folge der Partialsummen zu $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt ist. Nach dem vorigen Resultat ist die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe absolut konvergent. ■

Das Quotientenkriterium.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq k_0$, *für ein* $k_0 \in \mathbb{N}$. *Weiterhin sei* $0 < q < 1$. *Dann gilt die Implikation*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad \textit{für alle } k \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ absolut konvergent.}$$

Beweis: Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$ für alle $k \geq k_0$ per Induktion. Somit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|a_k| &\leq \sum_{k=1}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\sum_{k=k_0}^{n} q^{k-k_0} = \sum_{k=1}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\frac{1}{1-q} < \infty\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge der Partialsummen zu $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Damit ist die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe absolut konvergent. ■

Das Wurzelkriterium liefert genauso wie das Quotientenkriterium eine wichtige *hinreichende* Bedingung für die absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$, *und sei* $0 < q < 1$. *Dann gilt die Implikation*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1 \quad \textit{für alle } k \ge k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ absolut konvergent.}$$

Beweis: Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ folgt direkt $|a_k| \le q^k$ für alle $k \ge k_0$. Somit gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^{n} q^k \le \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} < \infty.$$

Genauso wie eben folgt daraus die Behauptung der absoluten Konvergenz. ■

Zum Quotienten- und Wurzelkriterium.

Bemerkung: Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist jeweils erfüllt, falls

$$p := \lim_{k\to\infty} \sup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad p := \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

d.h. für den größten Häufungspunkt p gilt $p < 1$. In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $q := p + \varepsilon < 1$. Weiterhin gibt es dann nur *endlich* viele Folgeglieder $|a_{k+1}/a_k|$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|}$, die oberhalb von q liegen. Daher gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[k]{|a_k|} < q < 1 \qquad \text{für alle } k \geq k_0,$$

d.h. die Voraussetzungen des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums sind erfüllt. □

Bemerkung: Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist jeweils verletzt, falls

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \qquad \text{für alle } k \geq k_0$$

für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt $|a_k| \leq |a_{k+1}|$ bzw. $|a_k| \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, womit die Summanden a_k keine Nullfolge bilden, d.h. die Reihe *divergiert*. □

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Die Reihe ist somit (absolut) konvergent. ♢

Beispiel. Wir untersuchen für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}.$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Reihe (absolut) konvergent. ♢

Hier einige Grenzwerte (ohne Beweis):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

♢

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Damit konvergiert die Exponentialreihe *für alle* $z \in \mathbb{K}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

□

Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion (d.h. eine Permutation) auf $\mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $(a_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die mit σ permutierte Folge.

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad \text{für } \sigma_k := \sigma(k).$$

Satz: *Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergiere die zugehörige Reihe absolut. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Permutation auf $\mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) Die zur permutierten Folge $(a_{\sigma_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe ist absolut konvergent.

(b) Die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

Beweis: (a): Für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt sei, dass $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset \{1, \ldots, N\}$.

Somit ist die zu $(a_{\sigma_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe absolut konvergent, und es gilt

$$S^\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nun ist die Reihe zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der (absolut konvergenten) Reihe zu $(a_{\sigma_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Daher gilt ebenso $S \leq S^\sigma$, somit gilt insgesamt $S = S^\sigma$.

(b): Wendet man dies auf die absolut konvergente Reihe zu $(|a_k| + a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, so bekommt man

$$S + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S^\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k},$$

so dass die Grenzwerte der beiden Reihen wie behauptet übereinstimmen. ■

Umordnung nicht absolut konvergenter Reihen.

Warnung: Für konvergente Reihen, die *nicht* absolut konvergieren, gilt die Aussage des vorigen Satzes i.A. nicht. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\pm\dots$$

ist hierfür ein Gegenbeispiel. Zum Nachweis sei $k\in\mathbb{N}$. Dann gilt für die 2^{k-1} *ungeraden* Indizes $2^k+(2m-1)$, für $m=1,2,\dots,2^{k-1}$, die Ungleichung

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+3}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\geq\frac{1}{2k+2}.$$

Damit ist nach Umordnung der Reihe die Folge der n-ten Partialsummen

$$1-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\Bigg(\sum_{m=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{2^k+(2m-1)}\Bigg)}_{>1/4}-\frac{1}{2k+2}\Bigg)$$

unbeschränkt, d.h. die permutierte alternierende harmonische Reihe divergiert. ♢

Der Riemannsche Umordnungssatz.

Zwischenfazit: Durch Umordnungen von konvergenten, aber nicht absolut konvergenten, Reihen kann sich deren Konvergenzverhalten ändern.

Für reelle Reihen gilt der Umordnungssatz von Riemann[a].

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen, deren zugehörige Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Dann gibt es für jedes* $S \in \mathbb{R}$ *eine Permutation* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *der Reihe, die gegen* S *konvergiert, d.h.*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

□

[a] Bernhard Riemann (1826-1866), deutscher Mathematiker

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das "Ausmultiplizieren" von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für *endliche* Summen gilt

$$(a_0 + \ldots + a_m)\cdot(b_0 + \ldots + b_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} a_k b_\ell.$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell.$$

Beachte:

Jedes Indexpaar $(k,\ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf der rechten Seite tritt *genau* einmal auf.

Multiplikation von absolut konvergenten Reihen.

Satz: *Seien* $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ *und* $(b_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$, *deren zugehörigen Reihen jeweils absolut konvergieren. Weiterhin sei* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \longmapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$, *für* $k \in \mathbb{N}_0$, *eine bijektive Abbildung. Dann gilt:*

(a) Die Reihe zu der Folge $(a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ist absolut konvergent.*

(b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Beweis: (a): Für $n \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \le \sum_{\ell=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |a_\ell|\,|b_m| \le \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_\ell|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|\right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe zu $(a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation σ.

(b): Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge:

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Für $N = (n+1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_n),$$

und somit

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{n} b_m \right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right). \blacksquare$$

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weitere spezielle Reihenfolge: Nummerierung entlang der Gegendiagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Man erhält damit das Cauchy-Produkt der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots\end{aligned}$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Satz: Für die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{K}.$$

Beweis: Für $z \in \mathbb{K}$ ist die Exponentialreihe $\exp(z)$ absolut konvergent, womit

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \\
&= \exp(z+w).
\end{aligned}$$

■

7 Potenzreihen

Definition: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und weiterhin sei $z_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

Potenzreihe zum Entwicklungspunkt z_0 mit Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ◯

Fernziel: Wir wollen Funktionen $f \equiv f(z)$ entwickeln in eine Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

Beispielsweise wird die Exponentialfunktion durch die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K},$$

dargestellt, d.h. durch eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und mit den Koeffizienten $a_k = 1/k!$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. ♢

Erinnerung an die geometrische Reihe.

Wir betrachten für $q \in \mathbb{K}$ die geometrische Folge $(q^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

für die zugehörigen Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der geometrischen Reihe.

Fall (a): Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe *absolut* mit Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Zum Nachweis der absoluten Konvergenz verwenden wir $|q^k| = |q|^k$, für $k \in \mathbb{N}_0$.

Fall (b): Für $|q| \geq 1$ divergiert die geometrische Reihe, denn die Folge $(q^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ihrer Summanden bildet in diesem Fall *keine* Nullfolge. □

Die verschobene geometrische Reihe.

Definition: Für $z_0 \in \mathbb{K}$ heißt

$$G_{z_0}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

die um z_0 verschobene geometrische Reihe. ◯

Beoachtung: Die verschobene geometrische Reihe $G_{z_0}(z)$ ist eine Potenzreihe zum Entwicklungspunkt z_0 mit konstanten Koeffizienten Eins, d.h. $a_k \equiv 1$. □

Mit $q := z - z_0$ können wir das Konvergenzverhalten von $G_{z_0}(z)$ analysieren.

Folgerung: Die verschobene geometrische Reihe $G_{z_0}(z)$, für $z_0 \in \mathbb{K}$,

(a) konvergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| < 1$ absolut mit Grenzwert

$$G_{z_0}(z) = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

(b) divergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| \geq 1$. □

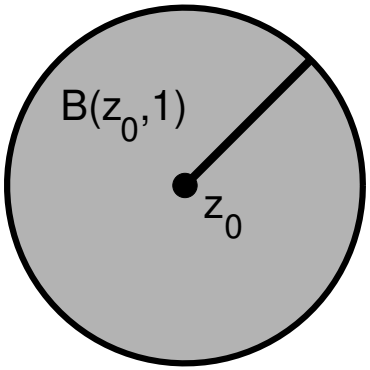
Geometrische Erklärung zur Konvergenz.

Wir können das Konvergenzverhalten der verschobenen geometrischen Reihe mit der folgenden geometrischen Reformulierung unseres vorigen Resultats erklären.

Folgerung: Die verschobene geometrische Reihe $G_{z_0}(z)$, für $z_0 \in \mathbb{K}$,

(a) konvergiert absolut in der offenen Kugel $B(z_0, 1) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < 1\}$.

(b) divergiert in $\mathbb{K} \setminus B(z_0, 1)$. □



Der Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, und weiterhin sei $z_0 \in \mathbb{K}$. Dann gibt es zu der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

entweder eine nicht-negative reelle Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

(a)

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent;}$$

(b)

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent;}$$

oder die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{K}$. In der ersten Alternative wird die Zahl $r \in [0, \infty)$ als Konvergenzradius *der Potenzreihe bezeichnet. Anderenfalls verwenden wir die Notation $r = \infty$ für den Konvergenzradius.*

Geometrische Erklärung zum Konvergenzradius.

Wir können den vorigen Satz geometrisch reformulieren.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$*, und weiterhin sei* $z_0 \in \mathbb{K}$*. Dann gibt es zu der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

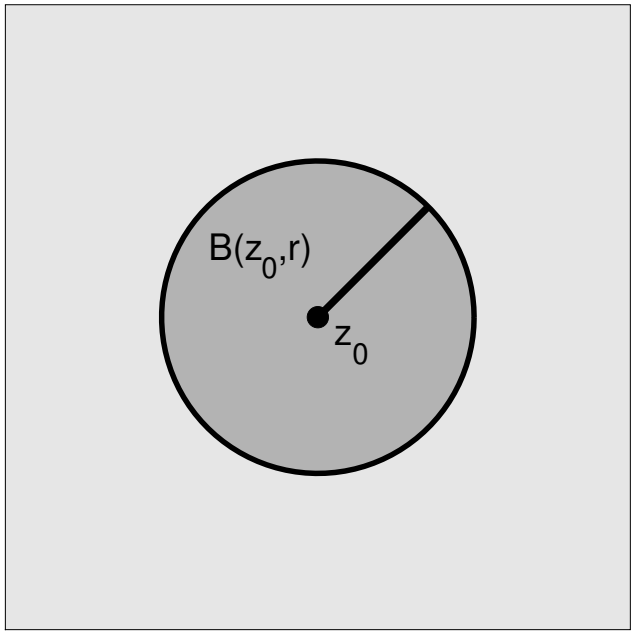
entweder eine nicht-negative reelle Zahl $r \geq 0$*, so dass die Potenzreihe*

(a) absolut konvergiert in der offenen Kugel $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < r\}$*;*

(b) divergiert in $\mathbb{K} \setminus B[z_0, r]$*;*

oder die Potenzreihe konvergiert absolut in jeder Kugel $B(z_0, r)$*, für alle* $r \geq 0$*.*

Geometrische Erklärung zum Konvergenzradius.



Fragen:

- Wie berechnen wir den Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$?
- Wie sieht es aus mit dem Konvergenzverhalten auf dem Rand

$$\partial B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| = r\} \qquad \text{für } r \in (0, \infty)?$$

- Wie beweisen wir die Aussage des Satzes? □

Zum Beweis des Satzes.

Beweis: Wir definieren

$$r := \sup\left\{\rho \in [0,\infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent für } \textit{ein } w \in \mathbb{K} \text{ mit } |w| = \rho\right\}.$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) konvergent.
- Falls $r < \infty$, so divergiert die Potenzreihe für *alle* $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| > r$.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{K}$ mit $|w| > \rho$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Dann ist $(a_k w^k)_{k\geq 0}$ beschränkt, d.h. für ein $M > 0$ gilt

$$\left|a_k w^k\right| \leq M \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$\left|a_k(z-z_0)^k\right| = \left|a_k w^k\right| \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k \leq M \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

und weiterhin

$$\left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k \leq \left|\frac{z-z_0}{w}\right| < 1 \qquad \text{für alle } k \geq 1,$$

so dass die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k$$

konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

absolut für *alle* $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$. ■

Bemerkung: Der Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe ist eindeutig. □

Erinnerung an Quotienten- und Wurzelkriterium.

Bemerkung: Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist jeweils erfüllt, falls

$$p := \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad p := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

d.h. für den größten Häufungspunkt p gilt $p < 1$. □

Bemerkung: Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist jeweils verletzt, falls

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \qquad \text{für alle } k \geq k_0$$

für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt $|a_k| \leq |a_{k+1}|$ bzw. $|a_k| \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, womit die Summanden a_k keine Nullfolge bilden, d.h. die Reihe *divergiert*. Insbesondere divergiert die Reihe, falls

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

□

Die Formel von Cauchy-Hadamard.

Satz: *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$, *und weiterhin sei* $z_0 \in \mathbb{K}$. *Dann lässt sich der Konvergenzradius* $r \geq 0$ *der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

mit der Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

berechnen. Dabei setzen wir $r := 0$ *im Fall der uneigentlichen Konvergenz* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$ *sowie* $r := \infty$, *falls* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$.

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium, zusammen mit der Äquivalenz

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{|z - z_0|} > \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

womit $\sqrt[k]{\left|a_k (z - z_0)^k\right|} \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$. ■

Hinreichende Bedingungen zur Konvergenz.

Bemerkung: Wir haben die Formel von Cauchy-Hadamard[a] mit dem Wurzelkriterium bewiesen. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann ebenso mit dem Quotientenkriterium berechnet werden, allerdings unter etwas restriktiveren Voraussetzungen.

Satz: *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, und weiterhin sei $z_0 \in \mathbb{K}$. Falls einer der beiden Grenzwerte*

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{oder} \qquad r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so liefert dieser Grenzwert den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

[a] Jacques Hadamard (1865-1963), französischer Mathematiker

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard. In diesem Fall besitzt die konvergente Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ nämlich nur einen Häufungspunkt, so dass gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Für den zweiten Teil der Aussage verwenden wir das Quotientenkriterium, womit

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |z-z_0|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \text{für } z \neq z_0$$

für alle $a_k \neq 0$, und daraus folgt die Äquivalanz

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

■

Beispiel 1: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

konvergiert nur für $z = 0$, denn die Folge $(k! z^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Summanden bildet für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$. ♢

Beispiel 2: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

hat den Konvergenzradius $r = 1$. ♢

Beispiel 3: Die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ absolut und hat daher Konvergenzradius $r = \infty$. ♢

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$, *sei* $z_0 \in \mathbb{K}$, *und*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

zugehörige Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1 > 0$ *und* $r_2 > 0$. *Dann gilt*

(a) die Potenzreihendarstellung

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(z - z_0)^k \qquad \textit{für } |z - z_0| < \min(r_1, r_2);$$

(b) die Potenzreihendarstellung

$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k (z - z_0)^k \qquad \textit{für } |z - z_0| < r_1 \textit{ und mit } \lambda \in \mathbb{K}.$$

□

Das Cauchy-Produkt für Potenzreihen.

Satz: *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$, *sei* $z_0 \in \mathbb{K}$, *und*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

zugehörige Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1 > 0$ *und* $r_2 > 0$.

Dann gilt die Potenzreihendarstellung

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) (z - z_0)^k \qquad \textit{für } |z - z_0| < \min(r_1, r_2).$$

des Cauchy-Produkts. □

8 Funktionen

Definition: Seien M und N nichtleere Mengen. Unter einer Funktion (oder Abbildung) f von M nach N verstehen wir eine wohldefinierte Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet. Wir verwenden hierzu die Notation $y = f(x)$ bzw. $x \longmapsto f(x)$. Weiterhin notieren wir $f : M \longrightarrow N$. ◯

Bemerkung: Die knappe Notation $f : M \longrightarrow N$ verbinden wir mit der Aussage

$$f : M \longrightarrow N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in M : \exists! \, y \in N : y = f(x).$$

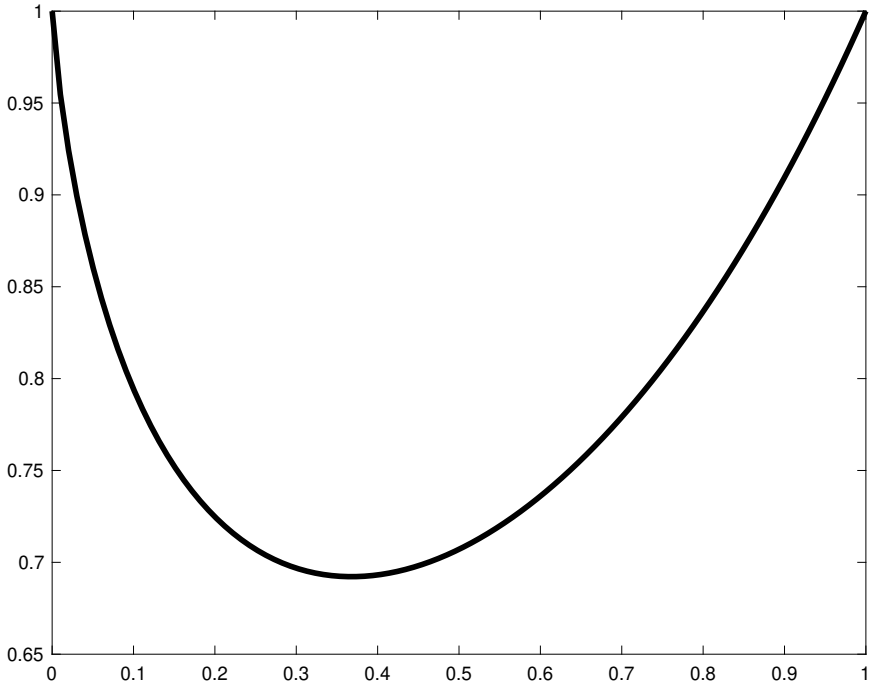
□

Weitere Bezeichnungen.

- M heißt Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f;
- N heißt Wertebereich (oder Bildbereich) von f;
- Die Menge $\{(x, f(x)) | x \in M\} \subset M \times N$ heißt Graph der Funktion f. □

Beispiel.

- Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, definiert durch $f(x) = x^x$.
- $M = [0,1]$ Definitionsbereich;
- $N = [0,1]$ Wertebereich.



Graph von $f(x) = x^x$.

Matlab script:

```
xmin=0.0; xmax=1.0; n=100;
x = linspace(xmin,xmax,n);
y = x.^x;
plot(x,y,'k-','Linewidth',3);

print -deps2 x_hoch_x.eps
```

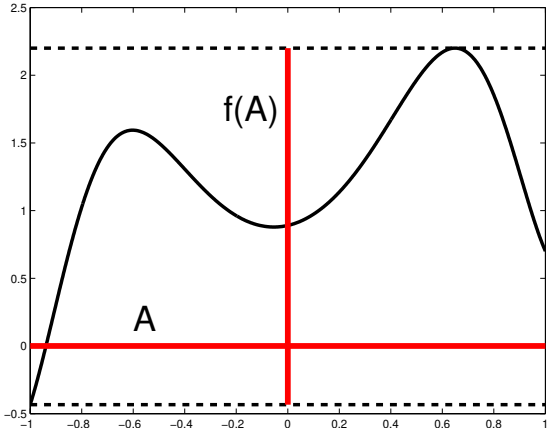
Weitere Notationen und Bezeichnungen.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion.

- Zu $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset N$$

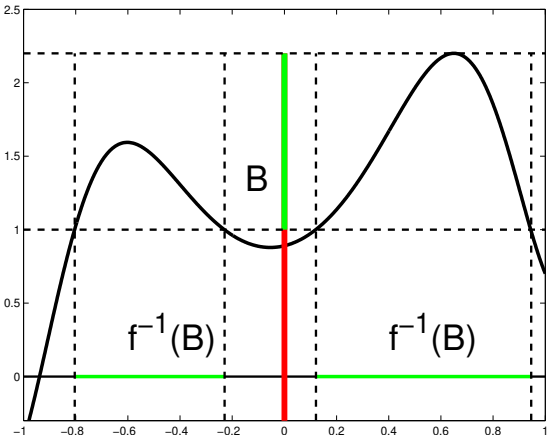
das Bild von A unter der Funktion f.



- Zu $B \subset N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in M \mid f(a) \in B\} \subset M$$

das Urbild von B unter der Funktion f.



Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Definition. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion.

Dann heißt f surjektiv, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall y \in N \; \exists x \in M : y = f(x).$$

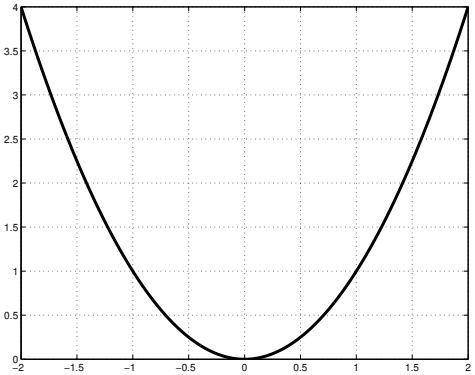
Weiterhin heißt f injektiv, falls die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Schließlich heißt f bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. ◯

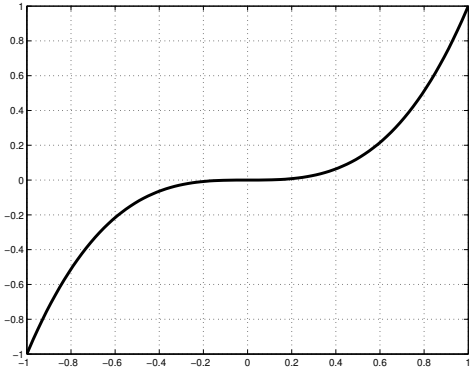
Bemerkung: Funktionen $f : M \longrightarrow f(M)$ sind (per Definition) surjektiv. □

Beispiele.



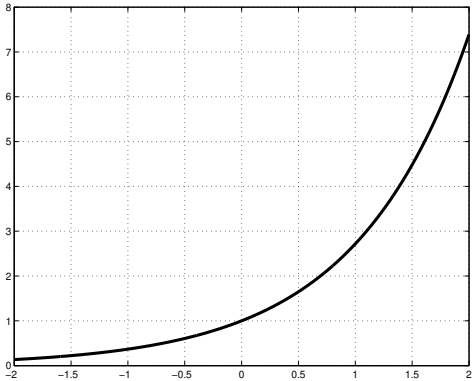
$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

surjektiv, nicht injektiv.



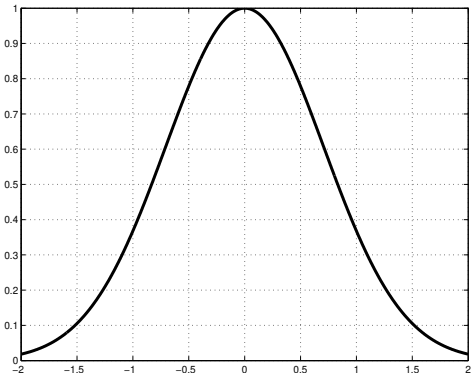
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

bijektiv.



$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \exp(x)$

injektiv, nicht surjektiv.



$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \exp(-x^2)$

weder injektiv noch surjektiv.

Injektive Funktionen lassen sich invertieren.

- Eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ lässt sich *invertieren*, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert *genau ein* $x \in M$ mit $y = f(x)$.
- Für eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ wird deren Umkehrfunktion (bzw. Inverse) $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$ definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für } y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$

- Falls $f : M \longrightarrow N$ bijektiv ist, so gilt $f(M) = N$ und $f^{-1}(N) = M$, d.h.

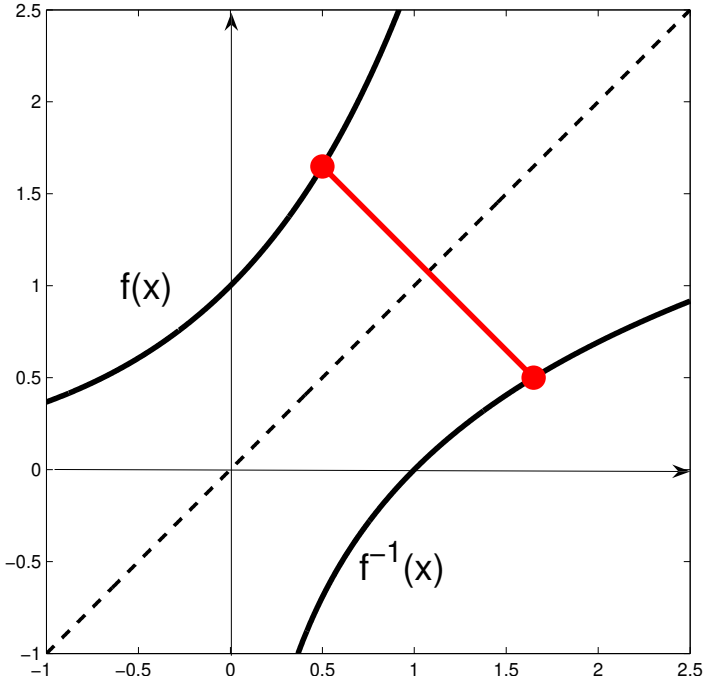
$$M \xrightarrow{f} N \quad \text{und} \quad N \xrightarrow{f^{-1}} M.$$

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann wird die Funktion $\mathrm{id} : M \longrightarrow M$, definiert durch $\mathrm{id}(x) = x$, als Identität auf M bezeichnet. ◯

Bemerkung: Die Identität $\mathrm{id} : M \longrightarrow M$ ist bijektiv, und es gilt $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$. □

Zur Geometrie der Umkehrfunktion.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine reellwertige injektive Funktion einer reellen Variablen, d.h. $M, N \subset \mathbb{R}$. Dann erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Diagonalen $x = y$.



Konstruktion der Umkehrfunktion.

Erklärung:

- Es gilt:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

- Der Graph von f enthält die Punkte

$$(x, f(x)).$$

- Der Graph von f^{-1} enthält die Punkte

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$

Komposition von Funktionen.

Definition: Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ von f und g eine Funktion, definiert durch

$$g \circ f : M \longrightarrow P \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für } x \in M.$$

◯

Bemerkungen: Für die Komposition von Funktionen $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ und $h : P \longrightarrow Q$ gilt die Assoziativität

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Die Kommutativität gilt jedoch im Allgemeinen *nicht*, d.h. $g \circ f \neq f \circ g$. □

Gegenbeispiel: Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = x^2 + 2x \quad \text{und} \quad g(x) = x + 1$$

gilt einerseits $(g \circ f)(x) = g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, andererseits $(f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$, somit $g \circ f \neq f \circ g$. ♢

Algebraische Polynome.

Definition: Eine Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

heißt algebraisches Polynom (kurz: Polynom) mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, wobei $a_n \neq 0$, und vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. ◯

Bezeichnungen für Polynome (aufsteigenden Grades):

$(n = 0)$ konstante Funktionen: $p(x) \equiv a_0$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$;

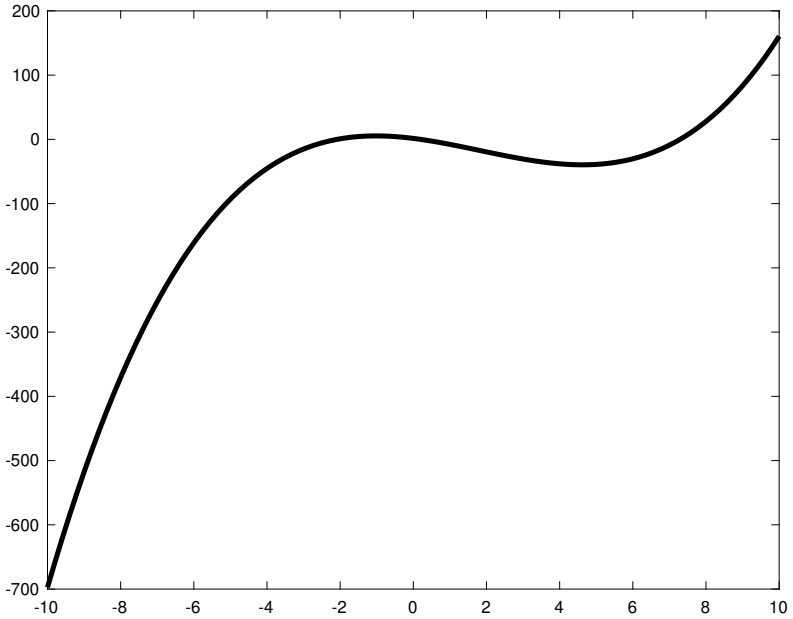
$(n = 1)$ affin-lineare Funktionen: $p(x) = a_0 + a_1 x$ für $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$;

$(n = 2)$ quadratische Polynome: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;

$(n = 3)$ kubische Polynome: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ für $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}$;

$(n \geq 4)$ quartische, quintische Polynome, ... □

Der Graph eines kubischen Polynoms.



Das kubische Polynom

$$f(x) = 0.5x^3 - 2.7x^2 - 7.1x + 1.5.$$

Matlab script:

```
p = [0.5 -2.7 -7.1 1.5];
xmin=-10.0; xmax=10.0; n=100;
x = linspace(xmin,xmax,n);
y = polyval(p,x);
plot(x,y,'k-','Linewidth',3);

print -deps2 kubisch.eps
```

Elementare Eigenschaften von Polynomen.

Definition: Für eine Funktion $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ wird $x^* \in \mathbb{K}$ als Nullstelle von f bezeichnet, falls $f(x^*) = 0$. ◯

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)**:** Jedes nicht konstante Polynom $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ besitzt mindestens eine (komplexe oder reelle) Nullstelle. □

Folgerung: *Jedes Polynom* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \not\equiv 0$, *vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *besitzt höchstens* n *Nullstellen.* □

Folgerung: Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch seine Koeffizienten eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten: Zwei Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{und} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

stimmen genau dann überein, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. □

Bemerkung: Die o.g. Übereinstimmung zweier Polynome p, q lässt sich durch einen Koeffizientenvergleich überprüfen, d.h. es gilt $p \equiv q$ genau dann, wenn $a_k = b_k$ für alle $0 \leq k \leq n$. □

9 Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Erinnerung: Die Exponentialfunktion wird durch die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

dargestellt. Weiterhin gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{K}.$$

□

Erinnerung: Außerdem erinnern wir an die Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

□

Frage: Und wann dürfen wir endlich $\exp(x) = e^x$ schreiben? □

Elementare Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Folgerung: Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt:

(a) $\exp(0) = 1$;

(b) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{K}$;

(c) $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: (a) folgt sofort aus der Darstellung der Exponentialreihe.

(b): Aus der Funktionalgleichung und (a) folgt

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{K},$$

womit $\exp(z) \neq 0$, und somit gilt $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{K}$.

(c): Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe reell, d.h. $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$1 = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix}) = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = |\exp(ix)|^2.$$

unter Verwendung von (b). ■

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Folgerung: Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$ und $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x < 0$;

(b) $\exp(1) = e$;

(c) $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (a): Für $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1.$$

Für $x < 0$ gilt $-x > 0$, somit $\exp(-x) > 1$, womit $0 < \exp(x) = 1/\exp(-x) < 1$.

(b): folgt gleich.

(c): Per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ können wir zeigen: $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (leichte Übung). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt damit $\exp(-n) = 1/\exp(n) = 1/e^n = e^{-n}$, woraus insgesamt mit $\exp(0) = 1$ schließlich die Behauptung folgt. □

Und was ist nun mit $\exp(1) = e$?

Satz: *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Folgerung: Es gilt $\exp(1) = e$. ■

Beweis des Satzes: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und damit bekommen wir die Darstellung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\right) \frac{x^k}{k!}$$

für die Differenz der n-ten Partialsummen.

Fortsetzung des Beweises. Für $1 \leq k \leq n$ gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq 1 - \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\binom{k-1}{j}\left(\frac{k-1}{n}\right)^j \\ &< \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-1}{j} < \frac{k}{n}(1+1)^{k-1} < \frac{2^k k}{n}, \end{aligned}$$

womit

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2|x|)^k}{(k-1)!} < \frac{2|x|\exp(2|x|)}{n} \longrightarrow 0 \text{ für } n\to\infty,$$

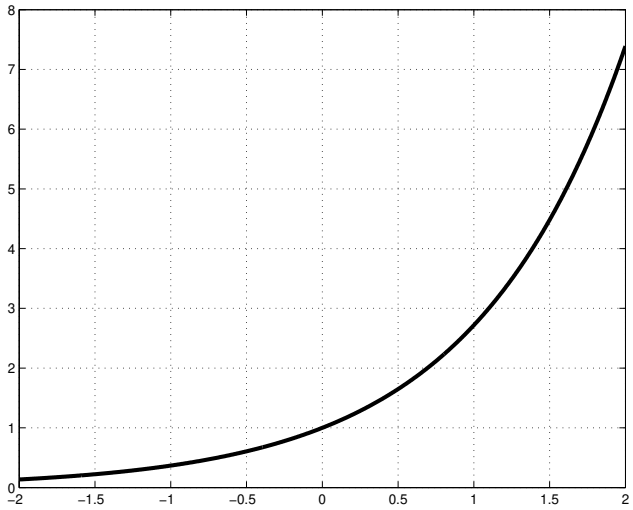
d.h. die Folge der Differenzen ist eine Nullfolge, womit die Behauptung gilt:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

■

Zum Werteverhalten der Exponentialfunktion.

Im Folgenden diskutieren wir das *Werteverhalten* und das *Wachstumsverhalten* der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$.



Graph von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

Elementare Resultate zum Werteverhalten:

(a) $\exp(0) = 1$

(b) $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

(c) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(d) $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(e) $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$

(f) $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x < 0$

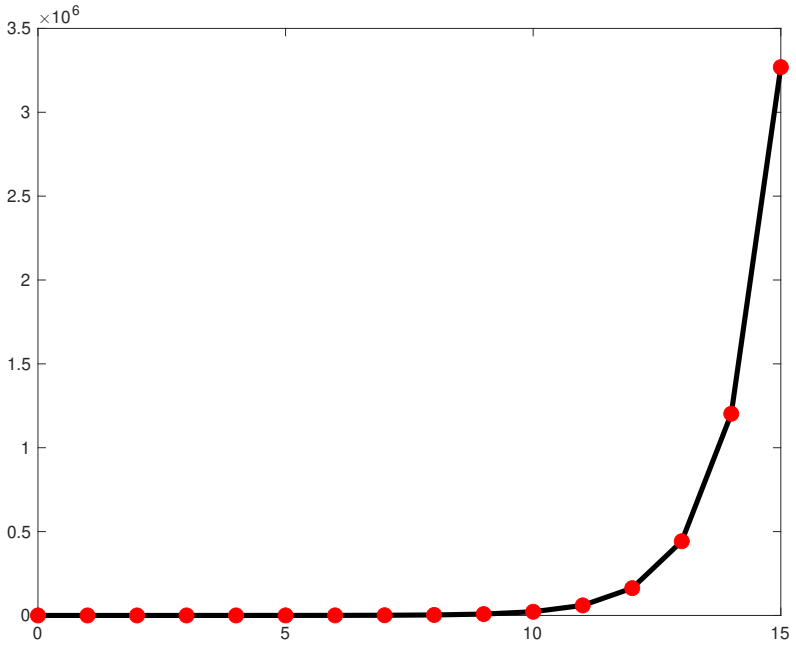
Folgerung: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wächst streng monoton, d.h.

$$\exp(x) < \exp(y) \qquad \text{für alle } x < y.$$

Beweis: Für $x < y$ gilt $y - x > 0$, und somit $\exp(y - x) > 1$ wegen (e).
Aus (d) folgt daraus $\exp(y)/\exp(x) > 1$ bzw. $\exp(x) < \exp(y)$. □

Zum rapiden Wachstum der Exponentialfunktion.

Wir werten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ bei $n \in \mathbb{N}_0$ aus:



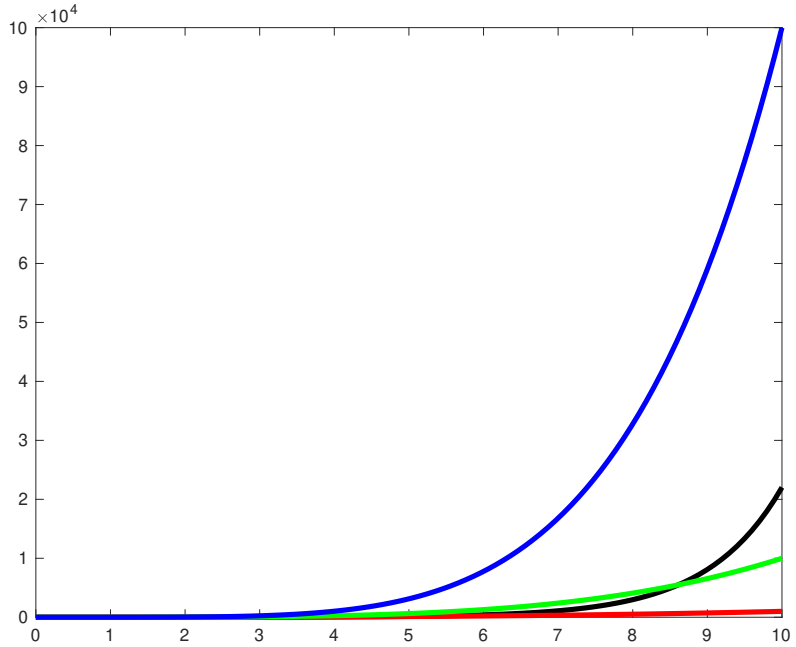
Graph von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

n	$\exp(n) = e^n$
0	1.0
1	$e \approx 2.718281828459045$
2	$e^2 \approx 7.389056098930650$
3	$e^3 \approx 20.085536923187668$
4	$e^4 \approx 54.598150033144236$
5	$e^5 \approx 1.484131591025766 \cdot 10^2$
10	$e^{10} \approx 2.202646579480672 \cdot 10^4$
25	$e^{25} \approx 7.200489933738588 \cdot 10^{10}$
50	$e^{50} \approx 5.184705528587072 \cdot 10^{21}$

	Deutschland	**Europa**	**Weltbevölkerung**
Bevölkerung	$83\text{Mio.} = 8.3 \cdot 10^7$	$741\text{Mio.} = 7.41 \cdot 10^8$	$7.7\text{Mia.} = 7.7 \cdot 10^9$
	$\in [\exp(18), \exp(19)]$	$\in [\exp(20), \exp(21)]$	$\in [\exp(22), \exp(23)]$

Polynomiales und exponentielles Wachstum.

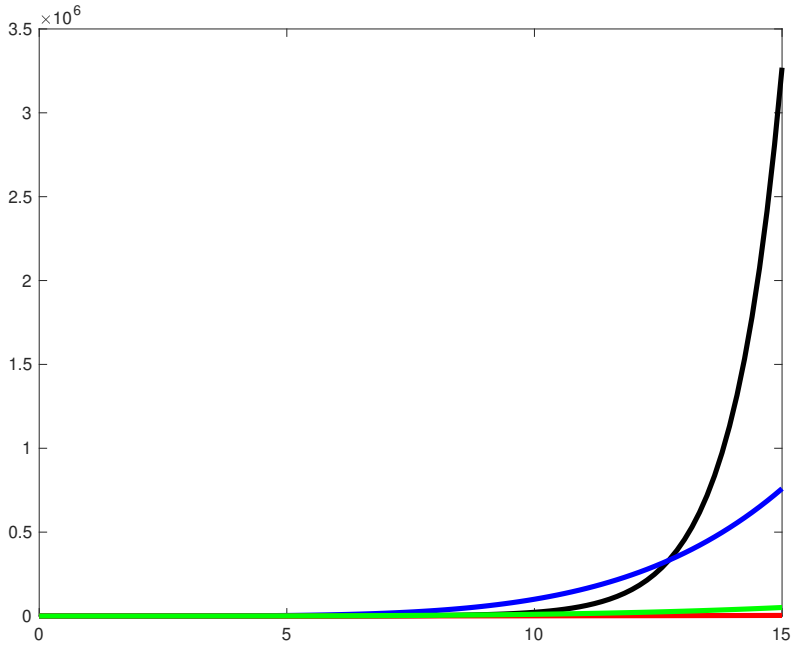
Wir illustrieren das Wachstum der Exponentialfunktion im Vergleich mit den Monomen x^k, hier für $k = 3, 4, 5$, auf den Intervallen $[0, 10]$ und $[0, 15]$.



Funktionsgraphen von

$\exp : [0, 10] \longrightarrow (0, \infty)$, $x^3 : [0, 10] \longrightarrow [0, \infty)$,

$x^4 : [0, 10] \longrightarrow [0, \infty)$, $x^5 : [0, 10] \longrightarrow [0, \infty)$.



Funktionsgraphen von

$\exp : [0, 15] \longrightarrow (0, \infty)$, $x^3 : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$,

$x^4 : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$, $x^5 : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$.

Polynomiales und exponentielles Wachstum.

Proposition: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\exp(x) > x^n \qquad \text{für alle } x > (2n)^2.$$

Beweis: Für $x > (2n)^2$ gilt

$$\exp(x) > \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^n \cdot x^n}{(2n)!} > \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!}\, x^n > x^n.$$

■

Folgerung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\exp(x) < \frac{1}{|x|^n} \qquad \text{für alle } x < -(2n)^2.$$

Beweis: Für $x < -(2n)^2$ bzw. $-x = |x| > (2n)^2$ gilt $\exp(-x) > (-x)^n = |x|^n$, und somit

$$\frac{1}{\exp(x)} > |x|^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp(x) < \frac{1}{|x|^n}.$$

■

Der natürliche Logarithmus: Vorbereitung.

Wir betrachten für ein *festes* $x > 0$ die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$x_n := x^{1/2^n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt $x_{n+1}^2 = x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und daraus folgt weiterhin

$$\begin{aligned} x_n - 1 &= x_{n+1}^2 - 1 \geq 2(x_{n+1} - 1) \\ 1 - \frac{1}{x_n} &= 1 - \frac{1}{x_{n+1}^2} \leq 2\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} 2^n(x_n - 1) &\geq 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) \\ 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) &\leq 2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Der natürliche Logarithmus: Vorbereitung.

Proposition: Die beiden reellen Folgen

$$a_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{und} \quad b_n := 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert.

Beweis: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fällt monoton und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wächst monoton. Dies folgt aus den beiden vorigen Ungleichungen und der Definition der Folgen.

Weiterhin gilt (erneut per Definition der Folgen sowie mit $x_n = x^{1/2^n}$)

$$a_n \leq 0 \text{ und } b_n \leq 0 \text{ für } 0 < x \leq 1 \quad \text{sowie} \quad a_n > 0 \text{ und } b_n > 0 \text{ für } x > 1.$$

Wegen $a_n = x_n \cdot b_n$ folgen daraus sofort die Abschätzungen

$$b_0 \leq b_n \leq a_n \leq a_0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit bilden die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Intervallschachtelung, womit deren Konvergenz bereits gezeigt ist. Wegen $x_n \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$ und mit $a_n = x_n \cdot b_n$ haben die beiden Folgen einen gemeinsamen Grenzwert. ■

Der natürliche Logarithmus.

Nach unseren Vorbereitungen können wir den Logarithmus endlich einführen.

Definition: Der natürliche Logarithmus $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
(kurz: der Logarithmus) ist erklärt durch

$$\log(x) := \lim_{n \to \infty} 2^n \left(x^{1/2^n} - 1 \right) \qquad \text{für } x > 0.$$

○

Bemerkung: Der natürliche Logarithmus $\log(x)$ ist für alle $x > 0$ wohldefiniert.
Weiterhin gilt die äquivalente Darstellung

$$\log(x) = \lim_{n \to \infty} 2^n \left(1 - x^{-1/2^n} \right) \qquad \text{für } x > 0.$$

Schließlich gilt

$$\log(1) = 0.$$

□

Zum Werteverhalten des natürlichen Logarithmus.

Proposition: Für $x > 0$ gelten die Abschätzungen

$$2^n \left(1 - x^{-1/2^n}\right) \leq \log(x) \leq 2^n \left(x^{1/2^n} - 1\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Dies folgt aus der Intervallschachtelung mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Beispiel: Für $n = 7$ und $x = 2$ gilt

$$0.691 \approx 2^7(1 - 2^{-1/2^7}) \leq \log(2) \leq 2^7(2^{1/2^7} - 1) \approx 0.695$$

und damit bekommen wir eine Näherung an $\log(2)$. ♢

Folgerung: Für $x > 0$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 1 - 1/x &\leq \log(x) \leq x - 1 \\ 2\left(1 - 1/\sqrt{x}\right) &\leq \log(x) \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right). \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Proposition für $n = 0$ bzw. für $n = 1$. ■

Folgerung: Es gilt $\log(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $\log(x) > 0$ für $x > 1$. □

Die Funktionalgleichung des Logarithmus.

Satz: Für den natürlichen Logarithmus gilt die Funktionalgleichung

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

Beweis: Dies folgt aus der Darstellung

$$2^n \left((x \cdot y)^{1/2^n} - 1 \right) = x^{1/2^n} \cdot 2^n \left(y^{1/2^n} - 1 \right) + 2^n \left(x^{1/2^n} - 1 \right),$$

womit

$$\begin{aligned} \log(x \cdot y) &= \lim_{n\to\infty} 2^n \left((x \cdot y)^{1/2^n} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x^{1/2^n} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \left(y^{1/2^n} - 1 \right) + \lim_{n\to\infty} 2^n \left(x^{1/2^n} - 1 \right) \\ &= \log(y) + \log(x), \end{aligned}$$

wobei wir erneut die Konvergenz $x^{1/2^n} \longrightarrow 1$, für $n \to \infty$, verwenden. ■

Folgerungen aus der Funktionalgleichung.

Folgerung: Für $x, y > 0$ gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \log(1/x) &= -\log(x) \\ \log(x/y) &= \log(x) - \log(y) \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Identität gilt mit der Funktionalgleichung des Logarithmus (für $y = 1/x$), woraus ebenso die zweite Identität mit $x/y = x \cdot 1/y$ folgt. ■

Folgerung: Der Logarithmus $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ wächst streng monoton, d.h.

$$\log(x) < \log(y) \qquad \text{für } 0 < x < y.$$

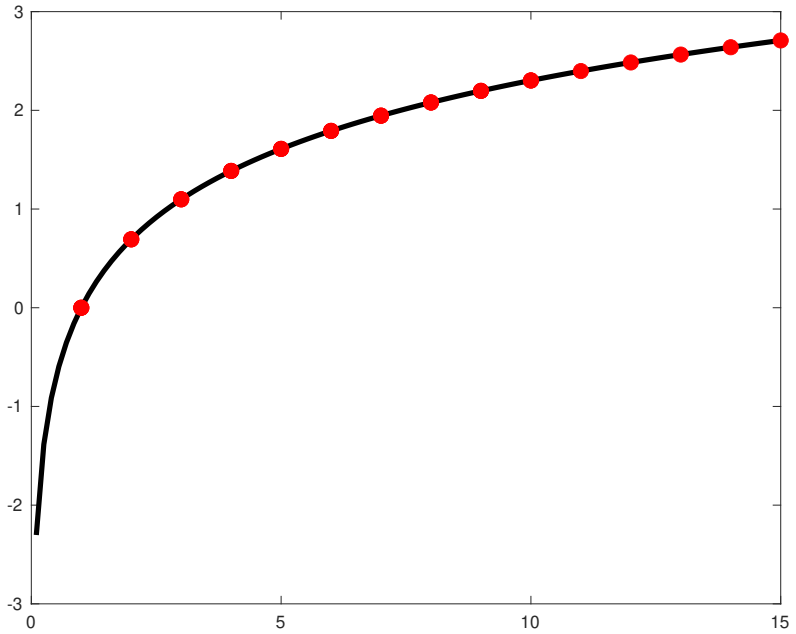
Beweis: Mit der Funktionalgleichung des Logarithmus gilt

$$\log(x) = \log(y) + \log(x/y) < \log(y) \qquad \text{für } 0 < x < y,$$

wobei wir für $x/y < 1$ die Abschätzung $\log(x/y) < 0$ verwenden. ■

Zum Wachstum des natürlichen Logarithmus.

Wir werten den natürlichen Logarithmus $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ bei $n \in \mathbb{N}$ aus:

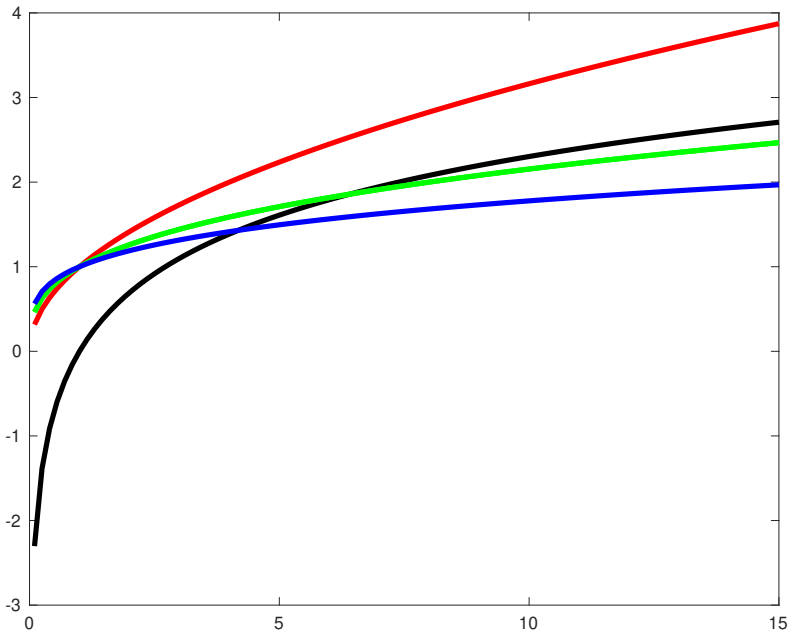


Graph von $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

n	$\log(n)$
1	0
2	$\log(2) \approx 0.693147180559945$
3	$\log(3) \approx 1.098612288668110$
4	$\log(4) \approx 1.386294361119891$
5	$\log(5) \approx 1.609437912434100$
10	$\log(10) \approx 2.302585092994046$
25	$\log(25) \approx 3.218875824868201$
50	$\log(50) \approx 3.912023005428146$
100	$\log(100) \approx 4.605170185988092$
1000	$\log(1000) \approx 6.907755278982137$

Wachstum des Logarithmus und von Wurzeln.

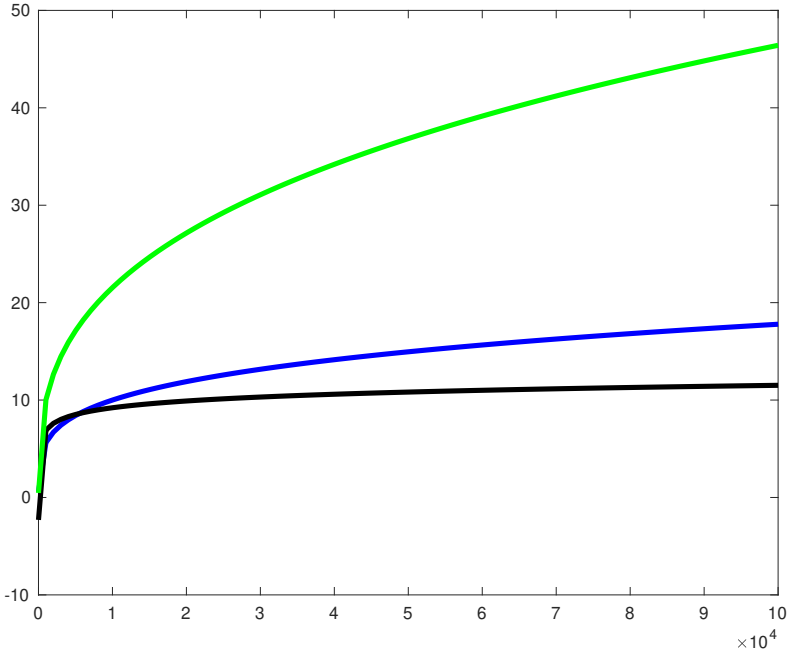
Wir illustrieren das Wachstum des natürlichen Logarithmus im Vergleich mit den Wurzelfunktionen $x^{1/k}$, für $k = 2, 3, 4$, auf $(0, 15]$ und auf $(0, 100000]$.



Funktionsgraphen von

$\log : (0, 15] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sqrt{x} : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$,

$\sqrt[3]{x} : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$, $\sqrt[4]{x} : [0, 15] \longrightarrow [0, \infty)$.

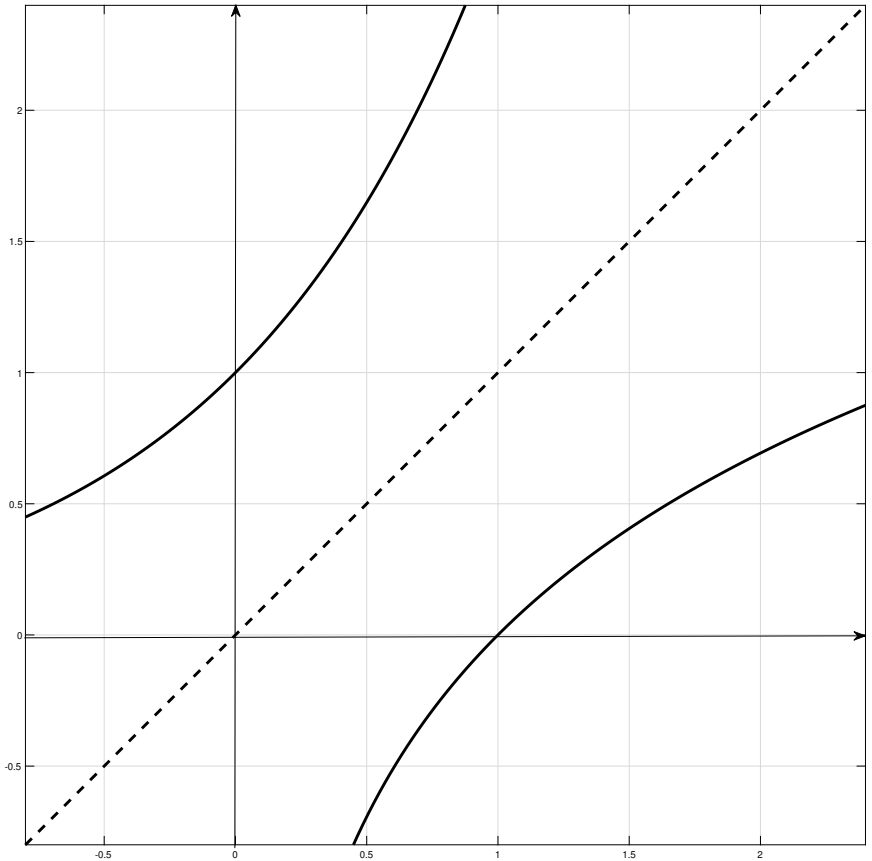


Funktionsgraphen von $\log : (0, 100000] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\sqrt[3]{x} : [0, 100000] \longrightarrow [0, \infty)$,

$\sqrt[4]{x} : [0, 100000] \longrightarrow [0, \infty)$.

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus.



Die Funktionsgraphen von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ und $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Vermutung: Exponentialfunktion und Logarithmus sind zueinander invers. □

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus.

Satz: Der Logarithmus $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, d.h. es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \exp(\log(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in (0,\infty), \\ \log(\exp(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis: Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung (aus der Vorbereitung)

$$\log(x) \leq 2^n \left(x^{1/2^n} - 1 \right) \qquad \text{bzw.} \qquad \left(1 + \frac{\log(x)}{2^n} \right)^{2^n} \leq x.$$

Unter Verwendung der Darstellung

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

folgt daraus einerseits

$$\exp(\log(x)) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\log(x)}{n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\log(x)}{2^n} \right)^{2^n} \leq x.$$

Fortsetzung des Beweises.

Andererseits gilt für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die untere Abschätzung

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n} \qquad \text{bzw.} \qquad 2^n \left((\exp(x))^{1/2^n} - 1\right) \geq x$$

womit gilt

$$\log(\exp(x)) = \lim_{n\to\infty} 2^n \left((\exp(x))^{1/2^n} - 1\right) \geq x \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Allerdings ist für $x > 0$ die *strikte* Ungleichung $\log(\exp(x)) > x$ ausgeschlossen, denn mit der Monotonie der Exponentialfunktion und des Logarithmus würde daraus (unter Verwendung von $\exp(\log(x)) \leq x$ für $x > 0$) der Widerspruch

$$\exp(x) < \exp(\log(\exp(x))) \leq \exp(x)$$

folgen. Somit gilt notwendigerweise die Identität

$$\log(\exp(x)) = x \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Diese Identität ist wegen $\exp(0) = 1$ und $\log(1) = 0$ ebenso für $x = 0$ erfüllt.

Weitere Fortsetzung des Beweises.

Wir diskutieren schließlich den Fall $x < 0$. In diesem Fall gilt $-x > 0$ und somit

$$\log(\exp(x)) = \log\left(\frac{1}{\exp(-x)}\right) = -\log(\exp(-x)) = -(-x) = x,$$

so dass insgesamt die zweite hier behauptete Identität gilt:

$$\log(\exp(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit können wir die erste hier behauptete Identität beweisen: Mit dem Argument $\log(x)$, für $x > 0$, gilt nämlich insbesondere

$$\log(\exp(\log(x))) = \log(x) \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Wegen der *strikten* Monotonie des Logarithmus gilt damit notwendigerweise

$$\exp(\log(x)) = x \qquad \text{für alle } x > 0,$$

womit die erste hier behauptete Identität schließlich ebenso bewiesen ist. ■

Triviale Bemerkung: Mit $\exp(1) = e$ gilt $\log(e) = 1$. □

Polynomiales und logarithmisches Wachstum.

Wir notieren schließlich eine Beobachtung zum Wachstumsverhalten des Logarithmus, die unmittelbar aus der Inversion der Exponentialfunktion folgt.

Dabei wenden wird den Logarithmus auf die Monome x^n, für $n \in \mathbb{N}$, an.

Das folgende Resultat belegt das *langsame* Wachstum des Logarithmus.

Proposition: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\log(x^n) < x \qquad \text{für alle } x > (2n)^2.$$

Beweis: Für $x > (2n)^2$ gilt

$$\exp(x) > x^n.$$

Mit der Monotonie des Logarithmus folgt daraus sofort die Behauptung:

$$x = \log(\exp(x)) > \log(x^n) \qquad \text{bzw.} \qquad \log(x^n) < x.$$

■

10 Die allgemeine Potenz

Zur Motivation diskutieren wir zwei relevante Ausgangsprobleme.

Problem 1: Wir wollen zu gegebenen $a > 0$ und $b > 0$ Gleichungen der Form

$$a^x = b$$

nach $x \in \mathbb{R}$ lösen. □

Problem 2: Wir wollen zu gegebenen $x \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ Gleichungen der Form

$$a^x = b$$

nach $a > 0$ lösen. □

Spezialfall zu Problem 2: Die Bestimmung der k-*ten Wurzel* $\sqrt[k]{b}$ von $b > 0$, für $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Lösung der Gleichung

$$a^k = b$$

nach $a > 0$. □

Was ist eigentlich a hoch x?

Ziel: Wir wollen für eine (positive) Basis $a > 0$ und einen *reellen* Exponent $x \in \mathbb{R}$ die allgemeine Potenz

$$a^x$$

einführen. Weiterhin wollen wir für die allgemeine Potenz Rechenregeln erklären, die konsistent sind mit den Rechenregeln für *rationale* Exponenten $x \in \mathbb{Q}$. □

Erinnerung: Für Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ hatten wir vereinbart

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$a^n := \begin{cases} a^n & \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \\ 1/a^{-n} & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Damit vereinbaren wir insbesondere die Notation $a^{-n} := 1/a^n$, für $n \in \mathbb{Z}$. □

Die k-te Wurzel.

Definition: Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, heißt $a \in \mathbb{R}$ k-te Wurzel von b, falls $a^k = b$. ◯

Wir sind hier nur an *positiven* Lösungen $a > 0$ zu gegebenen $b > 0$ interessiert.

Bemerkung: Für $k = 2$ und $b > 0$ wird die Gleichung $a^2 = b$ durch die (positive) Quadratwurzel $a = \sqrt{b}$ gelöst. Die negative Zahl $-\sqrt{b}$ ist eine andere Lösung von $a^2 = b$. Weitere Lösungen von $a^2 = b$ gibt es nicht. □

Wir verallgemeinern die einfache Beobachtung der Bemerkung wie folgt.

Satz: *Für* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, *gibt es zu* $b > 0$ *genau eine positive* k*-te Wurzel von* b.

Zur Notation: Wir notieren die eindeutig bestimmte positive k-te Wurzel von $b > 0$ mit

$$\sqrt[k]{b} \qquad \text{bzw.} \qquad b^{1/k}.$$

□

Zum Beweis des Satzes.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $b > 0$. Wir betrachten nun für ein beliebiges $a_0 > 0$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *positiver* reeller Zahlen, rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{b}{a_n^{k-1}}\right) = a_n\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{b}{a_n^k} - 1\right)\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wenden nun die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^k \geq 1 + kx$, $x \geq -1$, an mit

$$x := \frac{1}{k}\left(\frac{b}{a_n^k} - 1\right) > -1$$

womit

$$\frac{a_{n+1}^k}{a_n^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{b}{a_n^k} - 1\right)\right)^k \geq 1 + k \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{b}{a_n^k} - 1\right) = \frac{b}{a_n^k},$$

bzw. $a_{n+1}^k \geq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt die Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $0 < a_n \leq a_1$, für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \geq 0$.

Fortsetzung des Beweises.

Aus $a_{n+1}^k \geq b$ folgt nun $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k \geq b > 0$, und damit gilt $a > 0$.

Mit der Rekursionsvorschrift für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekommen wir (nach Grenzübergang $n \to \infty$)

$$a = \frac{1}{k}\left((k-1)a + \frac{b}{a^{k-1}}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad a^k = b.$$

Damit ist $a > 0$ *eine* positive k-te Wurzel von $b > 0$.

Wir zeigen schließlich die Eindeutigkeit der positiven k-ten Wurzel $a = \sqrt[k]{b}$: Angenommen, es gelte $a^k = \bar{a}^k$ für $\bar{a} > 0$, so folgt $a = \bar{a}$ aus der Darstellung

$$0 = a^k - \bar{a}^k = (a - \bar{a}) \cdot \sum_{j=1}^{k} a^{k-j}\bar{a}^{j-1}.$$

■

Fazit: Damit ist die positive k-te Wurzel von $b > 0$ wohldefiniert, und damit auch die Notation $\sqrt[k]{b}$ bzw. $b^{1/k}$, für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. □

Die Potenz für rationale Exponenten.

Vorbemerkung: Für $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\left(a^{1/k}\right)^m = (a^m)^{1/k}$$

denn mit den Rechenregeln für ganzzahlige Exponenten gilt

$$\left(\left(a^{1/k}\right)^m\right)^k = \left(\left(a^{1/k}\right)^k\right)^m = a^m = \left((a^m)^{1/k}\right)^k,$$

und somit stimmen $\left(a^{1/k}\right)^m$ und $(a^m)^{1/k}$ überein. □

Definition: Für $a > 0$ und $r = m/k$, mit $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$, ist die (rationale) r-te Potenz von a definiert durch

$$a^r := (a^m)^{1/k}.$$

○

Bemerkung: Für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ ist die r-te Potenz a^r wohldefiniert. □

Rationale Potenzen: Rechenregeln und Aussagen.

Proposition: Für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten folgende Rechenregeln.

(a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(b) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

(c) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Beweis: Übung. □

Proposition: Für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten folgende Aussagen.

(a) Aus $a < b$ und $r > 0$ folgt $a^r < b^r$

(b) Aus $a < b$ und $r < 0$ folgt $a^r > b^r$

(c) Aus $a < 1$ und $r < s$ folgt $a^r > a^s$

(d) Aus $a > 1$ und $r < s$ folgt $a^r < a^s$

Beweis: Übung. □

Schließlich noch ein nützliches Resultat.

Satz: *Für $a > 0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Beweis: Wir verwenden die Resultate (c) und (d) der vorigen Proposition.

Für $0 < a \leq 1$ ist die Folge $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n\geq 2}$ monoton wachsend, und es gilt $\sqrt[n]{a} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für $a > 1$ ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n\geq 2}$ monoton fallend und es gilt $\sqrt[n]{a} > 1$ für alle $n \geq 2$. In beiden Fällen konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n\geq 2}$ gegen ein positives $b > 0$. Damit gilt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a} = b,$$

und daraus folgt

$$b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{a}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a}\right)^2 = b^2,$$

d.h. $b = b^2$, womit $b = 1$. ■

Einführung der allgemeinen Potenz: Vorbereitung.

Proposition: Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\log(a^m) = m \cdot \log(a).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$\log(a^m) = \log\left(\prod_{j=1}^{m} a\right) = \sum_{j=1}^{m} \log(a) = m \cdot \log(a).$$

Proposition: Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\exp(x))^k = \exp(kx).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

$$\exp(kx) = \exp\left(\sum_{j=1}^{k} x\right) = \prod_{j=1}^{k} \exp(x) = (\exp(x))^k.$$

■

Einführung der allgemeinen Potenz.

Proposition: Für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a^r = \exp(r \cdot \log(a)).$$

Beweis: Für den Exponent $r \in \mathbb{Q}$ verwenden wir die Darstellung $r = m/k$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(\exp(r \cdot \log(a)))^k = \exp(m \cdot \log(a)) = \exp(\log(a^m)) = a^m = (a^r)^k.$$

■

Definition: Mit

$$a^x := \exp(x \cdot \log(a)) \qquad \text{für } a > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

ist die `allgemeine Potenz` zur `Basis` a und dem `Exponent` $x \in \mathbb{R}$ erklärt. ◯

Bemerkung: Die allgemeine Potenz a^x ist für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Weiterhin ist die allgemeine Potenz konsistent mit a^r für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. □

Jetzt dürfen wir endlich $\exp(x) = e^x$ schreiben.

Bemerkung: Mit $\log(e) = 1$ gilt insbesondere

$$e^x = \exp(x \log(e)) = \exp(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt für $a > 0$ die Darstellung

$$a^x = e^{x \log(a)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Schließlich gilt damit

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

□

Lösung von Problem 1: Für $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ ist die Lösung von $a^x = b$ eindeutig bestimmt mit

$$x = \frac{\log(b)}{\log(a)}.$$

Für $a = 1$ ist $a^x = b$ (uneindeutig) lösbar, sofern $b = 1$, ansonsten unlösbar. □

Rechenregeln.

Satz: Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln.

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \\ a^{x \cdot y} &= (a^x)^y . \end{aligned}$$

Beweis: Die Rechenregeln folgen sofort aus den Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion und des Logarithmus:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= e^{x \log(a)} \cdot e^{y \log(a)} = e^{(x+y)\log(a)} = a^{x+y} \\ a^x \cdot b^x &= e^{x \log(a)} \cdot e^{x \log(b)} = e^{x(\log(a)+\log(b))} = e^{x \log(a \cdot b)} = (a \cdot b)^x \\ (a^x)^y &= \left(e^{x \log(a)}\right)^y = e^{y \cdot \log(\exp(x \log(a)))} = e^{y \cdot x \cdot \log(a)} = a^{x \cdot y}. \end{aligned}$$

■

Weitere Rechenregeln.

Folgerung: Für die allgemeine Potenz gelten folgende Rechenregeln.

(a) $a^0 = 1$ für alle $a > 0$.

(b) $a^{-x} = 1/a^x$ für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(c) $e^{\log(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\log(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir weisen die behaupteten Rechenregeln wie folgt nach.

(a) $a^0 = \exp(0 \cdot \log(a)) = \exp(0) = 1$.
(b) $a^{-x} = \exp(-x \cdot \log(a)) = 1/\exp(x \cdot \log(a)) = 1/a^x$.
(c) $e^{\log(x)} = \exp(\log(x)) = x$.
(d) $\log(e^x) = \log(\exp(x)) = x$. ■

Der Logarithmus zur Basis a.

Vorbemerkung: Für $a > 0$ gilt

$$a^{\frac{\log(x)}{\log(a)}} = x \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Dies folgt aus der Herleitung unserer Lösung $x = \log(b)/\log(a)$ von $a^x = b$. □

Definition: Für $a > 0$ wird die Funktion $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\log_a(x) := \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \text{für } x > 0,$$

als Logarithmus zur Basis a bezeichnet. ○

Bemerkung: Der Logarithmus zur Basis e ist der natürliche Logarithmus, d.h.

$$\log(x) = \log_e(x) \qquad \text{für alle } x > 0.$$

□

Der Logarithmus $\log_a$ liefert die Lösung von $a^x = b$.

Folgerung: Für den Logarithmus zur Basis $a > 0$ gilt:

(a) $a^{\log_a(x)} = x$ für alle $x > 0$.

(b) $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Die Behauptung (a) folgt aus der Vorbemerkung und der Definition von $\log_a$.

Die Aussage in (b) rechnen wir nach mit

$$\log_a(a^x) = \log_a(\exp(x\log(a))) = \frac{\log(\exp(x\log(a)))}{\log(a)} = \frac{x \cdot \log(a)}{\log(a)} = x.$$

■

Fazit: Für $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ ist die Lösung der Gleichung $a^x = b$ nach Eigenschaft (b) eindeutig bestimmt mit $x = \log_a(b)$. □

Der Lösung von $a^x = b$ nach a.

Problem 2: Wir wollen zu gegebenen $x \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ Gleichungen der Form

$$a^x = b$$

nach $a > 0$ lösen.

Lösung: Für $x = 0$ ist die Gleichung $a^0 = b$ nur für $b = 1$ (uneindeutig) lösbar, sonst unlösbar. Sei also $x \neq 0$. Dann gilt

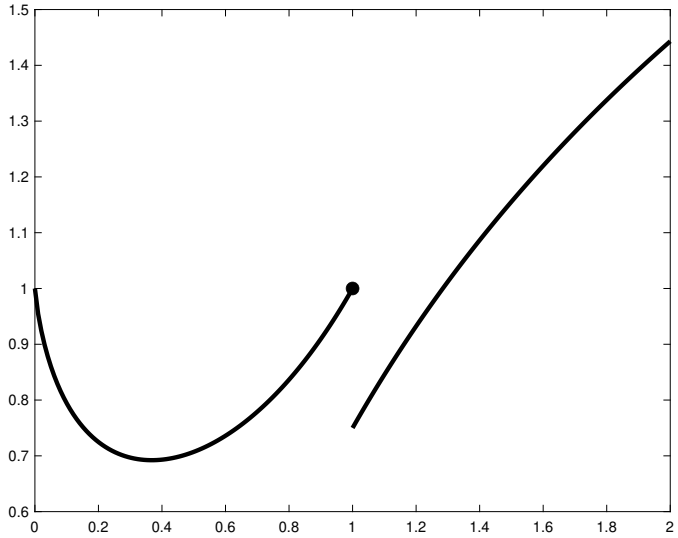
$$x = \log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} \qquad \text{bzw.} \qquad \log(a) = \frac{\log(b)}{x},$$

womit

$$a = \exp\left(\frac{\log(b)}{x}\right)$$

die eindeutige Lösung von $a^x = b$ liefert. □

11 Stetige Funktionen



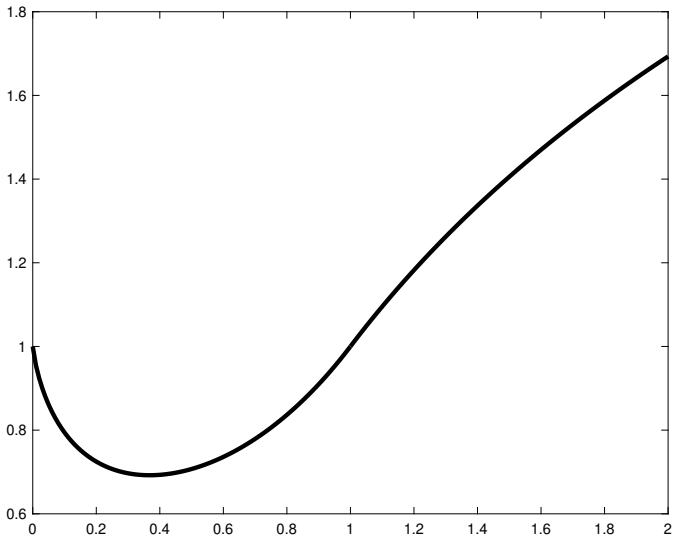
Die Funktion $f_u : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, stückweise definiert durch

$$f_u(x) = \begin{cases} x^x & \text{für } x \in [0,1], \\ \log(x) + 0.75 & \text{für } x \in (1,2], \end{cases}$$

ist bei $x = 1$ *unstetig*.

Hierzu eine unpräzise Erklärung:

„Eine unstetige Funktion macht Sprünge."



Die Funktion $f_s : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, stückweise definiert durch

$$f_s(x) = \begin{cases} x^x & \text{für } x \in [0,1], \\ \log(x) + 1 & \text{für } x \in (1,2], \end{cases}$$

ist auf $[0,2]$ *stetig*.

Erklärung: *„Der Graph einer stetigen Funktion lässt sich ohne Absetzen zeichnen."*

Stetige Funktionen in metrischen Räumen.

Wir beginnen unsere Diskussion mit der ε-δ-*Definition der Stetigkeit*.

Definition: Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Funktion

$$f : X \longrightarrow Y$$

heißt `stetig in` $x \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \equiv \delta(\varepsilon, x) > 0$ gibt mit

$$d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } d_X(y, x) < \delta.$$

Weiterhin heißt f `stetig auf` X, falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. Schließlich heißt f `gleichmäßig stetig auf` X, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ gibt mit

$$d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } d_X(y, x) < \delta.$$

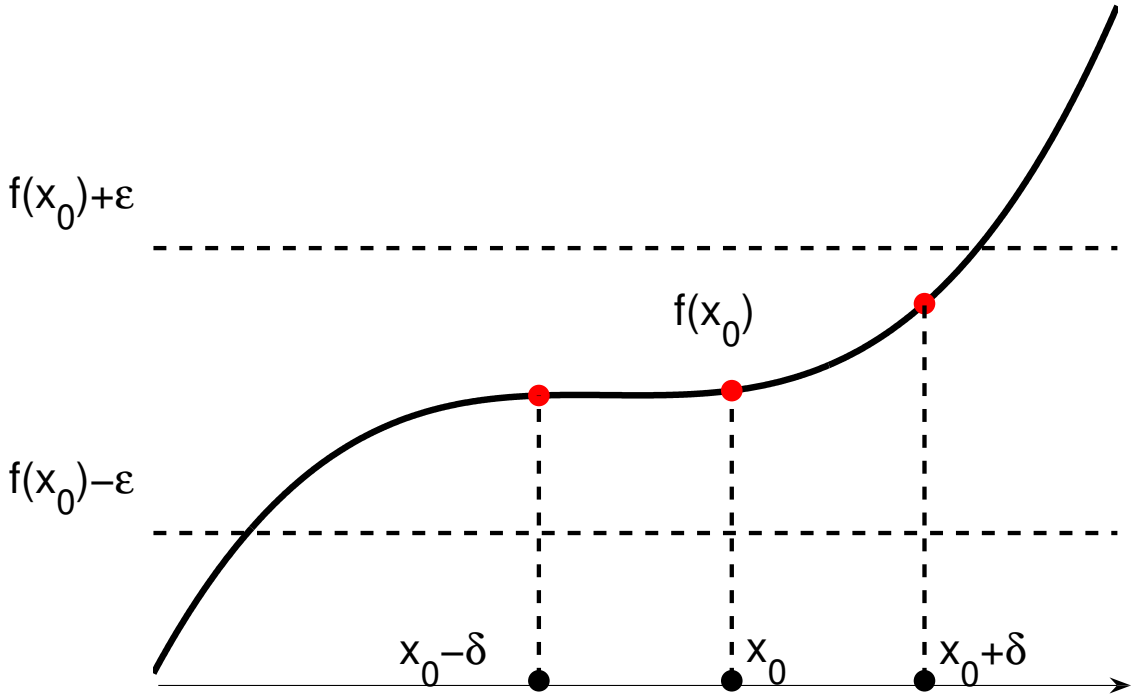
○

Bemerkung: Beachte, dass in der Definition der *gleichmäßigen* Stetigkeit das zu $\varepsilon > 0$ gehörige $\delta > 0$ i.W. nur von ε abhängt. Daher notieren wir: $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$. □

Stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Wir betrachten die metrischen Räume $X = I \subset \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$, jeweils mit der Betragsmetrik $|\cdot|$, so dass sich die ε-δ-Definition der *punktweisen* Stetigkeit wie folgt formulieren lässt: Die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in I$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \equiv \delta(\varepsilon, x) > 0 \;\; \forall y \in I : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$



Der Graph einer in x_0 stetigen Funktion.

Charakterisierung stetiger Funktionen.

Satz: Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert x, d.h. für $x_n \longrightarrow x$, $n \to \infty$, gilt

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis: $\Longrightarrow$**:** Sei f stetig in $x \in X$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ mit $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$ für alle $d_X(y, x) < \delta$. Weiterhin gibt es (zu diesem δ) ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x) < \delta$ für alle $n \geq N$, so dass $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

$\Longleftarrow$**:** Es gelte $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ für $n \to \infty$.

Angenommen, f sei nicht stetig in $x \in X$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $d_X(x_n, x) < 1/n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0$. In diesem Fall gilt einerseits die Konvergenz $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Andererseits konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen Funktionswerte *nicht* gegen $f(x)$, im Widerspruch zur obigen Annahme. ■

Stetige Funktionen bilden einen linearen Raum.

Im Folgenden betrachten wir $Y = \mathbb{K}$ als Wertebereich, mit der Betragsmetrik $|\cdot|$.

Folgerung: Seien (X, d_X) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge

$$\mathscr{C}(X, \mathbb{K}) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \,|\, f \text{ stetig auf } X\}$$

aller *skalar-wertigen* auf X stetigen Funktionen einen linearen Raum.

Beweis: Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen auf X. Weiterhin sei $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine Folge in X mit $x_n \longrightarrow x$, für $n \to \infty$.

Mit der Stetigkeit von f und g in x gilt $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ sowie $g(x_n) \longrightarrow g(x)$, jeweils für $n \to \infty$, d.h. die zugehörigen Folgen der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Dann gelten die Konvergenzen

$$\begin{aligned} (f+g)(x_n) &:= f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x_n) &:= \lambda \cdot f(x_n) \longrightarrow \lambda \cdot f(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, d.h. die Funktionen $f + g$ und $\lambda \cdot f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sind ebenso stetig in x. Damit sind insgesamt $f + g$ und $\lambda \cdot f$, für $\lambda \in \mathbb{K}$, stetig auf X. ■

Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Folgerung: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume. Weiterhin sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion auf X, und $g : Y \longrightarrow Z$ eine stetige Funktion auf Y. Dann ist die Komposition $g \circ f : X \longrightarrow Z$ eine stetige Funktion auf X.

Beweis: Sei $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit $x_n \longrightarrow x$, für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von f in x gilt die Konvergenz $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, für $n \to \infty$. Weiterhin gilt wegen der Stetigkeit von g in $f(x) \in Y$ die Konvergenz $g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(x))$, für $n \to \infty$, d.h.

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x) \quad \text{für } n \to \infty,$$

womit $g \circ f$ in x stetig ist.

Damit ist die Komposition $g \circ f$ insgesamt stetig auf X. ■

Beispiele für stetige Funktionen.

Wir betrachten nun *reell-wertige Funktionen einer reellen Veränderlichen*, d.h. Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall bezeichnet. Wir beginnen unsere Diskussion mit zwei trivialen Aussagen.

Proposition: Konstante Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $f \equiv c \in \mathbb{R}$ eine konstante Funktion. Dann konvergiert zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I die Folge der konstanten Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c. ■

Proposition: Die Identität $\mathrm{id} : I \longrightarrow I$ ist stetig auf I.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in I mit Grenzwert $x \in I$. Mit $\mathrm{id}(x_n) = x_n$ ist die Konvergenz von $(\mathrm{id}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x trivial. ■

Folgerung: Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis: Jedes (algebraische) Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt die Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wird somit beschrieben durch eine *endliche* Komposition stetiger Funktionen. ■

Weitere Beispiele für stetige Funktionen.

Proposition: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ ist $|\cdot|$ jeweils ein lineares Polynom, somit stetig. Weiterhin gilt für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ die Konvergenz $|x_n| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, und somit ist Betragsfunktion $|\cdot|$ ebenso stetig in $x = 0$. ■

Folgerung: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $|f|$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Die Funktion $|f| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, definiert durch $|f|(x) := |f(x)|$, für $x \in \mathbb{R}$, ist als Komposition der beiden stetigen Funktionen f und $|\cdot|$ stetig. ■

Jede Metrik ist stetig.

Als weiteres Beispiel diskutieren wir schließlich den folgenden Spezialfall.

Folgerung: Jede Metrik ist stetig.

Beweis: Sei $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf X. Weiterhin seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in X mit $x_n \longrightarrow x \in X$ und $y_n \longrightarrow y \in X$, jeweils für $n \to \infty$, so dass $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \in X \times X$ für $n \to \infty$.

Mit der Viereckungleichung gilt die Abschätzung

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty,$$

womit $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$ für $n \to \infty$. ■

Stetige Funktion auf kompakten Mengen.

Satz: Eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ eines kompakten metrischen Raums X in einen metrischen Raum Y ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Sei X kompakt. Dann ist X insbesondere folgenkompakt. Angenommen, $f : X \longrightarrow Y$ sei auf X stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf X. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ sowie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $d_X(x_n, y_n) < 1/n$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Folgenkompaktheit von X gibt es konvergente Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \longrightarrow x \in X$ und $y_{n_k} \longrightarrow y \in X$, jeweils für $k \to \infty$. Daraus folgt

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, y_{n_k}) + d_X(y_{n_k}, y) \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty,$$

womit $x = y$. Mit der Stetigkeit von f in $x = y$ folgt weiterhin $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$ und $f(y_{n_k}) \longrightarrow f(y)$, $k \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von d_Y gilt die Konvergenz

$$d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) = 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Dies steht im Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 > 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Reelle stetige Funktion auf kompakten Mengen.

Satz: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, und weiterhin sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf X. Dann ist f auf X beschränkt und weiterhin nimmt f auf dem Kompaktum X ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt Punkte $x_*, x^* \in X$ mit

$$f(x^*) = \sup_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf X. Weiterhin sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $f(x_n) \longrightarrow \sup_{y \in X} f(y)$ für $n \to \infty$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \longrightarrow x^*$ für $k \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(x^*) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \sup_{y \in Y} f(y) \in \mathbb{R}.$$

Somit nimmt f auf dem Kompaktum X sein Supremum bei $x^* \in X$ an, und in diesem Fall wird der Punkt x^* als Maximum von f auf X bezeichnet.
Insbesondere ist f auf X nach oben beschränkt mit $f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in X$.
Die entsprechende Eigenschaft für das Infimum zeigt man genauso. ■

Der $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ ist mit der d_∞-Metrik vollständig.

Satz: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist der lineare Raum

$$\mathscr{C}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig auf } X\}$$

bezüglich der Metrik

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Die Abbildung $d_\infty : \mathscr{C}(X, \mathbb{K}) \times \mathscr{C}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn für $f, g \in \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ nimmt die *stetige* Differenz $|f - g| \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ auf dem Kompaktum X ihr Supremum an.

Die Abbildung $d_\infty : \mathscr{C}(X, \mathbb{K}) \times \mathscr{C}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik, wobei man die Metrik-Axiome $(M1) - (M4)$ elementar nachweisen kann.

Fortsetzung des Beweises.

Nun zeigen wir die Vollständigkeit von $(\mathscr{C}(X,\mathbb{K}), d_\infty)$.

Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathscr{C}(X,\mathbb{K}), d_\infty)$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{y\in X} |f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Insbesondere gilt für *jedes* $x \in X$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N,$$

und daher ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes feste $x \in X$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Wegen der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ konvergiert die Cauchy-Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ zu $x \in X$ gegen einen Grenzwert aus $\mathbb{K}$. Wir setzen nun

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{für } x \in X.$$

Dann gilt (mit der Stetigkeit von $|\cdot|$)

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

für *alle* $x \in X$, und somit

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{y\in X} |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Daraus folgt die Konvergenz $f_n \longrightarrow f$, für $n \to \infty$, bezüglich der Metrik d_∞. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Grenzfunktion $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig auf X ist. Da $f_N \in \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ als stetige Funktion sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum X ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Daraus folgt für $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon,$$

womit die (gleichmäßige) Stetigkeit von f gezeigt ist, d.h. $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$. ■

12 Grenzwerte reeller Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns ausschließlich mit *reell-wertigen* Funktionen einer *reellen* Veränderlichen, d.h. mit Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{für } I \subset \mathbb{R}.$$

Solche Funktionen bezeichnen wir hier kurz als `reelle Funktionen`.

Bisher: Hatten zu konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Argumenten (in $\mathbb{R}$) zugehörige Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionswerten (in $\mathbb{R}$) betrachtet.

Resultat (aus der letzten Vorlesung): Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert und falls f stetig in x_0, so gilt $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ für $n \to \infty$.

Berechtigte Frage: Könnten wir nicht einfach schreiben

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \longrightarrow f(x_0) \text{ für } x \to x_0.$$

Antwort: Ja. Vorher müssen wir allerdings noch einige Details (er)klären. □

Beschränkte reelle Funktionen.

Wir formalisieren Begriffe, die wir bereits *„im Vorbeigehen“* eingeführt hatten.

Definition: Für $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt f

- `nach oben beschränkt`, falls das Bild $f(I) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.
- `nach unten beschränkt`, falls $f(I) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist.
- `beschränkt`, falls f nach unten und nach oben beschränkt ist.
- `unbeschränkt`, falls f nicht beschränkt ist. ◯

Beispiel: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ ist auf $\mathbb{R}$ *unbeschränkt*.
Auf einem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist $\exp : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jedoch *beschränkt*. ♢

Weitere berechtigte Frage: Dürfen wir, z.B. für $f(x) = \exp(x)$, schreiben

$$\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Antwort: Ja. Vorher müssen wir allerdings noch einige Details (er)klären. □

(Streng) monotone reelle Funktionen.

Definition: Für $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt f

- monoton wachsend auf I, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x < y$.
- streng monoton wachsend auf I, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x < y$.
- monoton fallend auf I, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x < y$.
- streng monoton fallend auf I, falls $f(x) > f(y)$ für $x < y$. ◯

Beispiel: Die Exponentialfunktionen $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ und die Logarithmen $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, jeweils zur Basis $a > 0$, sind streng monoton wachsend. ♢

Bemerkung: Jede bijektive (streng) monoton [wachsende/fallende] Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine (streng) monoton [wachsende/fallende] Inverse $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$. Die folgt (z.B. für strenge Monotonie) aus der Äquivalenz

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y) \quad \text{bzw.} \quad f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(y)) \Longleftrightarrow f(x) < f(y).$$

□

Grenzwerte reeller Funktionen.

Definition: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und weiterhin sei $x_0 \in \bar{I}$.
Falls es zu $f_0 \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

- $|f(x) - f_0| < \varepsilon$ aus $0 < |x - x_0| < \delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \longrightarrow f_0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

- $|f(x) - f_0| < \varepsilon$ aus $x > \delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f_0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \longrightarrow f_0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

- $|f(x) - f_0| < \varepsilon$ aus $x < -\delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f_0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \longrightarrow f_0 \quad \text{für } x \to -\infty.$$

○

Wir sagen: „*Die Funktion* $f(x)$ *strebt für* $x \longrightarrow x_0$ *gegen den Grenzwert* f_0.“
Im Sinne dieses Sprachgebrauchs lassen wir für $x_0 \in \bar{I}$ ebenso $x_0 = \pm\infty$ zu.

Beispiele für Grenzwerte reeller Funktionen.

Beispiel 1: Es gilt $1/\sqrt{x} \longrightarrow 0$ für $x \to \infty$ wegen $1/\sqrt{x} < \varepsilon$ für $x > 1/\varepsilon^2$. ♢

Beispiel 2: Es gilt $\exp(x) \longrightarrow 0$, für $x \to -\infty$, mit $\exp(x) < 1/|x|$ für $x < -4$. ♢

Beispiel 3: Es gilt $\log(x)/x \longrightarrow 0$ für $x \to \infty$, denn nach Beispiel 1 gilt

$$0 < \frac{\log(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } x \to \infty,$$

wobei wir in den Abschätzungen $x > 0$ jeweils als *groß genug* annehmen. ♢

Beispiel 4: Für $x_0 \in (0, \infty)$ gilt $\log(x) \longrightarrow \log(x_0)$, für $x \to x_0$. Dies folgt aus

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \qquad \text{für alle } x \in (0, \infty),$$

womit im Fall $x_0 = 1$ gilt $\log(x) \longrightarrow \log(1) = 0$, für $x \to 1$. Für $x_0 \neq 1$ folgt die Aussage mit $\log(x) - \log(x_0) = \log(x/x_0)$ genauso, denn in diesem Fall gilt

$$\log(x/x_0) \longrightarrow \log(1) = 0 \qquad \text{für } x \longrightarrow x_0.$$

♢

Uneigentliche Grenzwerte reeller Funktionen.

Definition: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und weiterhin sei $x_0 \in \bar{I}$.
Falls es zu jedem $C > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

- $f(x) > C$ (bzw. $f(x) < -C$) aus $0 < |x - x_0| < \delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

- $f(x) > C$ (bzw. $f(x) < -C$) aus $x > \delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

- $f(x) > C$ (bzw. $f(x) < -C$) aus $x < -\delta$ folgt, so notieren wir

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

○

Wir sagen: „*Die Funktion* $f(x)$ *strebt für* $x \longrightarrow x_0$ *gegen* $\pm\infty$.“ bzw.
„*Der Grenzwert von* $f(x)$ *für* $x \to x_0$ *existiert* uneigentlich.“

Polynome konvergieren uneigentlich bei Unendlich.

Satz: Für ein algebraisches Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vom Grad $n \geq 1$ und mit *führendem Koeffizient Eins*, d.h.

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und mit } n \geq 1,$$

gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt $p(x) = x^n q(x)$ mit

$$q(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq C := \max\{1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_1|, 2n|a_0|\}$ gilt $q(x) \geq 1/2$, also $p(x) \geq x^n/2 \geq x/2$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \longrightarrow \infty$, für $n \to \infty$. Dann gilt $x_n \geq C$, also $p(x_n) \geq x_n/2$, für n *groß genug*, womit $p(x_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Die andere Aussage beweist man analog. ■

Von Folgen zu Grenzwerten reeller Funktionen.

Satz: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \bar{I}$. Dann sind äquivalent:

(a) Es gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I, mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert, gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis: $(a) \Longrightarrow (b)$**:** Es gelte $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiere. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $0 < |x_n - x_0| < \delta$ bzw. $x_n > \delta$ bzw. $x_n < -\delta$ (gemäß der vorletzten Definition), so dass $|f(x_n) - f_0| < \varepsilon$, für n groß genug.

$(b) \Longrightarrow (a)$**:** Angenommen, Aussage (a) gelte nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in I$ existiert mit $x_n \neq x_0$ und $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ bzw. $x_n > n$ bzw. $x_n < -n$ (erneut gemäß der vorletzten Definitionen), aber $|f(x_n) - f_0| \geq \varepsilon_0$. In diesem Fall gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Allerdings konvergiert $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *nicht* gegen f_0. Dies steht jedoch im Widerspruch zu Aussage (b). ■

Bemerkung: Das obige Resultat gilt ebenso für *uneigentliche* Grenzwerte. □

Rechenregeln für Grenzwerten reeller Funktionen.

Folgerung: Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in \bar{I}$, so dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

existieren. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \\ \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \end{aligned}$$

Falls weiterhin $g(x) \neq 0$ für $x \in I$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

Beweis: Mit den entsprechenden Rechenregeln reeller Folgen. □

Monotonie von Grenzwerten reeller Funktionen.

Folgerung: Seien $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in \bar{I}$, so dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

existieren. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen.

(a) Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

(b) Falls $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, für alle $x \in I$, und $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Beweis: Mit den entsprechenden Monotonieeigenschaften reeller Folgen. □

Monotonie von Grenzwerten reeller Funktionen.

Zur letzten Konvergenzaussage diskutieren wir ein Beispiel.

Beispiel: Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y_0 > 0$, nämlich $y_0 = (2n)^2$, mit

$$\exp(-y) < \frac{1}{y^n} \qquad \text{für alle } y > y_0.$$

Für $0 \neq |x| < 1/\sqrt{y_0}$ folgt daraus (mit $y = 1/x^2$)

$$-|x|^n = -\frac{x^{2n}}{|x|^n} < \frac{\exp(-1/x^2)}{|x|^n} < \frac{x^{2n}}{|x|^n} = |x|^n.$$

und somit gilt

$$\frac{\exp(-1/x^2)}{x^n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

♢

Grenzwerte von Kompositionen reeller Funktionen.

Satz: Seien $f : I_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_g \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen, wobei $f(I_f) \subset I_g$. Falls die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to f_0} g(y) = g_0$$

(jeweils im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinne) existieren, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g_0.$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $\delta > 0$, so dass für $y \in I_g$ mit $0 < |y - f_0| < \delta$ (bzw. $y > \delta$ bzw. $y < -\delta$) gilt $|g(y) - g_0| < \varepsilon$ (bzw. $g(y) > \varepsilon$ bzw. $g(y) < -\varepsilon$).

Zu $\delta > 0$ wählen wir ein $\eta > 0$, so dass für alle $x \in I_f$ mit $0 < |x - x_0| < \eta$ (bzw. $x > \eta$ bzw. $x < -\eta$) gilt $|f(x) - f_0| < \delta$ (bzw. $f(x) > \delta$ bzw. $f(x) < -\delta$). Für diese $x \in I_f$ gilt schließlich

$$|(g(f(x)) - g_0| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad g(f(x)) > \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad g(f(x)) < -\varepsilon,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Grenzwerte von Kompositionen reeller Funktionen.

Folgerung: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \bar{I}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right|,$$

sofern der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (eigentlich oder uneigentlich) existiert. □

Beispiel: Für $x > 0$ gilt $x^{1/x} = \exp(\log(x)/x)$. Weiterhin gilt

$$\log(x)/x \longrightarrow 0 \text{ für } x \to \infty \qquad \text{und} \qquad \exp(y) \longrightarrow 1 \text{ für } y \to 0.$$

Daraus folgt

$$x^{1/x} = \exp(\log(x)/x) \longrightarrow 1 \text{ für } x \to \infty.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$. ♢

Noch ein Beispiel. Für $c \in \mathbb{R}$ und $0 < |y| \leq 1$ gilt

$$\left| \frac{\exp(cy) - 1}{y} - c \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c(cy)^{n-1}}{n!} \right| \leq |y| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c|^n}{n!},$$

woraus folgt

$$\lim_{y \to 0} \frac{\exp(cy) - 1}{y} = c.$$

Daraus ergibt sich wegen $y := 1/z \longrightarrow 0$ für $z \to \infty$

$$\lim_{z \to \infty} z\,(\exp(c/z) - 1) = c.$$

Für $c := \log(x)$, für $x > 0$, bekommen wir damit

$$\lim_{z \to \infty} z \left(x^{1/z} - 1 \right) = \log(x),$$

insbesondere gilt

$$\lim_{n \to \infty} n \left(x^{1/n} - 1 \right) = \log(x).$$

♢

Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert.

Definition: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \bar{I}$. Dann ist der `linksseitige Grenzwert` von f bei x_0 definiert durch

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) := \lim_{x \to x_0} \left(f|_{I \cap (-\infty, x_0)} \right)(x),$$

und der `rechtsseitige Grenzwert` von f bei x_0 ist definiert durch

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \to x_0} \left(f|_{I \cap (x_0, \infty)} \right)(x).$$

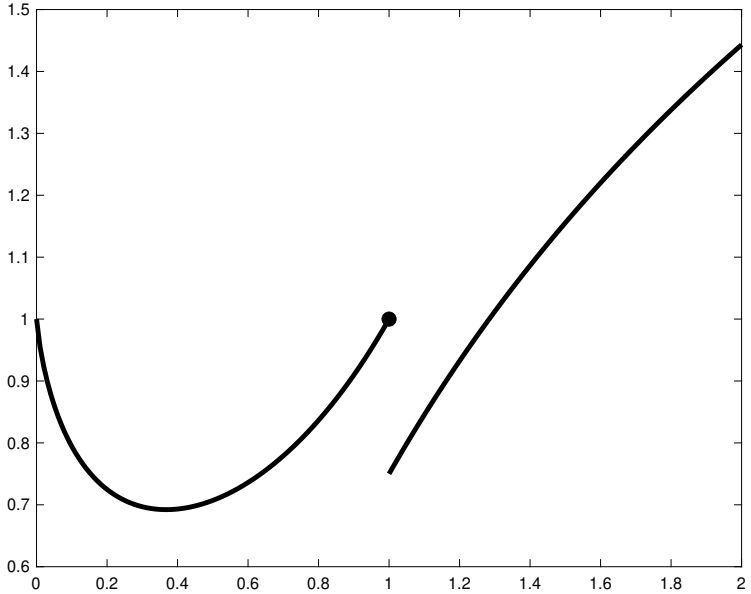
○

Bemerkung: Falls der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f bei x_0 jeweils existiert und falls diese beiden Grenzwerte übereinstimmen, so existiert auch $\lim_{x \to x_0} f(x)$, und es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Falls weiterhin $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, so ist f in x_0 stetig. □

Beispiel.



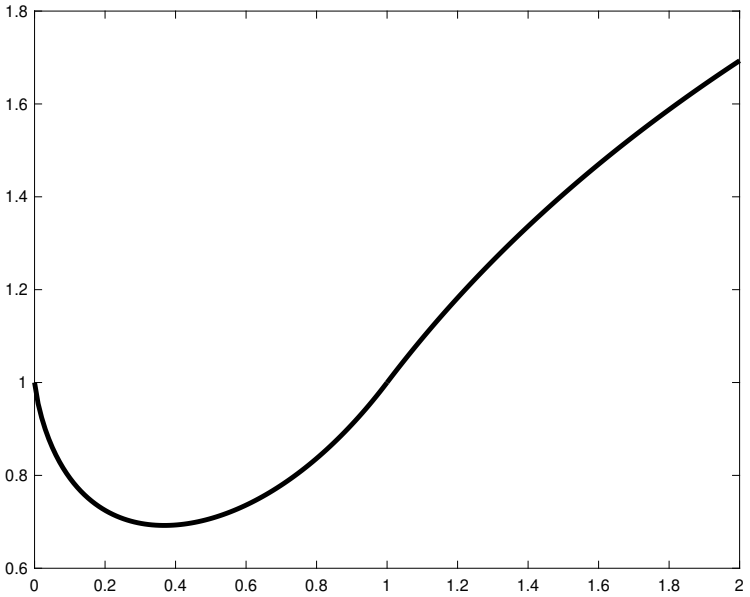
Für die Funktion $f_u : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_u(x) = \begin{cases} x^x & \text{für } x \in [0,1], \\ \log(x) + 0.75 & \text{für } x \in (1,2], \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f_u(x) = 1 \neq 0.75 = \lim_{x \searrow 1} f_u(x).$$

Somit ist f_u bei $x = 1$ *unstetig*.



Für die Funktion $f_s : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_s(x) = \begin{cases} x^x & \text{für } x \in [0,1], \\ \log(x) + 1 & \text{für } x \in (1,2], \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f_s(x) = 1 = \lim_{x \searrow 1} f_s(x).$$

Somit ist f_s bei $x = 1$ *stetig*.

Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert.

Satz: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \bar{I}$.

Falls f monoton wächst, so gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

Falls f monoton fällt, so gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \inf_{x<x_0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \sup_{x>x_0} f(x).$$

Beweis: Sei f monoton wachsend und $s := \sup_{x<x_0} f(x)$. Falls $s < \infty$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $t \in I$ mit $t < x_0$, so dass $s - \varepsilon < f(t)$. Für $x \in I$ mit $t \leq x < x_0$ ist dann wegen der Monotonie $s - \varepsilon < f(t) \leq f(x) \leq s$, also $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = s$.

Für $s = \infty$, gibt es zu $C > 0$ ein $t \in I$ mit $f(t) > C$ und damit gilt $f(x) > C$ für $x \in I$ mit $t \leq x < x_0$, also $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$.

Die zweite Aussage $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x)$ beweist man analog.

Falls f monoton fällt, so beweist man sämtliche Aussagen ebenso analog. ■

13 Stetige reelle Funktionen

Wir beweisen nun wichtige Resultate für stetige reelle Funktionen,

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, in diesem Abschnitt stets ein reelles Intervall bezeichnet. Dabei sind *beschränkte* Intervalle, z.B. das offene Intervall $I = (a, b)$ oder das kompakte Intervall $I = [a, b]$, jeweils für $a < b$, zugelassen, aber auch *unbeschränkte* Intervalle, z.B. $I = (-\infty, 0)$, $I = [0, \infty)$ oder $I = \mathbb{R}$.

Erinnerung: Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in I$, falls eine der folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \equiv \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \;\; \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

(b) Für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x_0$ gilt $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$, für $n \to \infty$.

(c) Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bzw. $f(x) \longrightarrow f(x_0)$, für $x \to x_0$.

(d) Es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Treppenfunktionen sind stückweise konstant.

Definition: Für ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, wird $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ als Treppenfunktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezeichnet, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

von $[a, b]$ und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{für alle } x_{k-1} < x < x_k \text{ für } 1 \leq k \leq n.$$

Dabei sind die Werte $\varphi(x_k)$, für $0 \leq k \leq n$, an den Teilungspunkten beliebig. ◯

Bemerkung: Nichtkonstante Treppenfunktionen sind unstetig. □

Nächster Schritt: Wir wollen stetige reelle Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ durch Treppenfunktionen *approximieren*. □

Satz: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

(a) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(b) $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: f ist auf $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \qquad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Wähle nun $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass $(b - a)/n < \delta$, und betrachte die Punkte

$$x_k := a + k \cdot (b - a)/n \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n,$$

die mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ eine *äquidistante* Zerlegung von $[a, b]$ liefern. Nun setzen wir $c_k := f(x_k) + \varepsilon/2$ und $d_k := f(x_k) - \varepsilon/2$ für $1 \leq k < n$. Damit besitzen die Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $\varphi(a) := \psi(a) := f(a)$,

$$\varphi(x) := d_k \text{ und } \psi(x) := c_k \quad \text{für } x_{k-1} < x \leq x_k \text{ und } 1 \leq k \leq n$$

die behaupteten Eigenschaften (a) und (b). ■

Ein Resultat zur Vorbereitung.

Satz: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, mit dem die folgende Aussage der entsprechenden Alternative gilt.

- Falls $f(x_0) > 0$, so gilt $f(x) > f(x_0)/2$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.
- Falls $f(x_0) < 0$, so gilt $f(x) < f(x_0)/2$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Beweis: Sei f stetig in x_0 mit $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es zwei mögliche Fälle.

Fall 1: Falls $f(x_0) > 0$, so gibt es zu $\varepsilon := f(x_0)/2$ ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x_0) - f(x) \leq |f(x_0) - f(x)| < \frac{f(x_0)}{2} \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Daraus folgt bereits die Behauptung mit

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Fall 2: Falls $f(x_0) < 0$, so wenden wir das Resultat aus Fall 1 auf $-f$ an, womit $-f(x) > -f(x_0)/2$ bzw. $f(x) < f(x_0)/2$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. ■

Der Satz von Bolzano.

Das folgende grundlegende Resultat geht auf Bolzano[a] zurück.

Satz (Bolzano): Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f eine Nullstelle in (a, b).

Beweis: Sei

$$M := \{x \in [a, b] \,|\, f(y) < 0 \text{ für alle } y \in [a, b] \text{ mit } y \leq x\} \subset [a, b].$$

Dann gilt $a \in M$ und $b \notin M$. Für $x_0 := \sup(M) < \infty$ gilt daher $x_0 \in [a, b]$.

Falls $f(x_0) \neq 0$, so gibt es (nach vorigem Satz) ein offenes Intervall $I_0 \subset [a, b]$ mit $x_0 \in I_0$ und $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$ für alle $x \in I_0 \cap [a, b]$. Nach Definition von x_0 gilt jedoch $I_0 \cap M \neq \emptyset$. Daher kann der erste Fall ($f(x) > 0$, für alle $x \in I_0 \cap [a, b]$) nicht eintreten. Im zweiten Fall ($f(x) < 0$, für alle $x \in I_0 \cap [a, b]$) gilt $I_0 \cap [a, b] \subset M$, und daraus folgt der Widerspruch $x_0 = \sup(M) > x_0$.

Daher ist x_0 eine Nullstelle von f, d.h. $f(x_0) = 0$. ■

[a] Bernard Bolzano (1781-1848), katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker

Folgerung aus dem Satz von Bolzano.

Folgerung: Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ungeraden Grades mit *führendem Koeffizient Eins*, d.h.

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

mit $n \in \mathbb{N}$ ungerade, hat mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Sei $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein (algebraisches) Polynom ungeraden Grades mit *führendem Koeffizient Eins*. Dann gelten die uneigentlichen Konvergenzen

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} p(x) = \infty,$$

und somit gibt es ein $R > 0$ mit $p(-R) < 0$ und $p(R) > 0$. Wegen der Stetigkeit von p gibt es nach dem Satz von Bolzano ein $x \in (-R, R)$ mit $p(x) = 0$. ■

Bemerkung: Für (algebraische) Polynome *geraden* Grades gilt die obige Aussage im Allgemeinen nicht, wie das Gegenbeispiel $p(x) = x^2 + 1$ zeigt. □

Der Zwischenwertsatz.

Das folgende wichtige Resultat wird als Zwischenwertsatz bezeichnet.

Folgerung: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt.

Sei nun $f(a) < f(b)$. Weiterhin sei $f_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < f_0 < f(b)$. Dann erfüllt die stetige Funktion $F(x) = f(x) - f_0$ die Voraussetzungen des Satzes von Bolzano mit $F(a) < 0$ und $F(b) > 0$. Daher gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $F(x_0) = f(x_0) - f_0 = 0$, d.h. $f(x_0) = f_0$.

Für den Fall $f(a) > f(b)$ und $f_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(b) < f_0 < f(a)$ betrachten wir $F(x) = f_0 - f(x)$ und beweisen die Aussage analog. ■

Anwendungen des Zwischenwertsatzes.

Beispiel 1: Die Gleichung

$$x^5 + x^2 + 2 = 0$$

hat nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[-2, 0]$ mindestens eine Lösung, denn für das Polynom $p(x) = x^5 + x^2 + 2$ gilt $p(-2) = -26$ und $p(0) = 2$. ♢

Beispiel 2: Die Gleichung

$$\exp\left(x^2\right) = 3x$$

hat nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Lösung in $(0, 1)$ und mindestens eine Lösung in $(1, 2)$, denn die stetige Funktion $f(x) = \exp\left(x^2\right) - 3x$ nimmt in 0 und in 2 jeweils positive Werte an, während $f(1)$ negativ ist. ♢

Eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Folgerung: Für $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nicht konstante Funktion. Dann ist das Bild $f(I)$ von f ein Intervall.

Beweis: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant.

Setze $\alpha := \inf(f(I))$ und $\beta := \sup(f(I))$. Da f nicht konstant ist, gilt $\alpha < \beta$.

Zu $y_0 \in (\alpha, \beta)$ gibt es $a, b \in I$ mit $\alpha < f(a) < y_0 < f(b) < \beta$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y_0$, d.h. $y_0 \in f(I)$, und daraus folgt $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Andererseits gilt $f(I) \subset [\alpha, \beta]$, d.h. insgesamt

$$(\alpha, \beta) \subset f(I) \subset [\alpha, \beta].$$

Somit ist $f(I)$ eines der vier Intervalle (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, oder $[\alpha, \beta]$. ■

Eine weitere Folgerung aus dem Zwischenwertsatz.

Folgerung: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist f streng monoton auf I.

Beweis: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv.

Angenommen, f sei nicht streng monoton auf I. Dann gibt es $a, b, c \in I$ mit

$$f(c) < f(a) < f(b) \qquad \text{und} \qquad a < b \text{ und } a < c.$$

Nun gibt es zwei Fälle:

Fall 1: Ist $a < b < c$, so werden sämtliche Werte aus $(f(a), f(b)) \subset (f(c), f(b))$ sowohl in (a, b) als auch in (b, c) angenommen.

Fall 2: Ist $a < c < b$, so werden sämtliche Werte aus $(f(c), f(a)) \subset (f(c), f(b))$ sowohl in (a, c) als auch in (c, b) angenommen.

In jedem der beiden Fälle widerspricht dies der Injektivität von f. ■

Eine wichtige Folgerung der beiden Folgerungen.

Folgerung: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ stetig.

Beweis: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Mit der Injektivität besitzt f eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$. Nach vorigem Resultat ist f streng monoton, o.E. streng monoton *wachsend*. Damit ist f^{-1} ebenso streng monoton wachsend.

Seien nun $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $y_1 := f(x_1), y_2 := f(x_2)$, so dass $y_1 < y_2$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu $y \in (y_1, y_2)$ ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $y = f(x)$, womit $x_1 < x = f^{-1}(y) < x_2$. Mit der Monotonie von f^{-1} gilt sogar

$$x_1 < \lim_{\eta \nearrow y} f^{-1}(\eta) = \sup_{\eta < y} f^{-1}(\eta) < x_2 \text{ und } x_1 < \lim_{\eta \searrow y} f^{-1}(\eta) = \inf_{\eta > y} f^{-1}(\eta) < x_2$$

Für $x_2 - x_1 =: \varepsilon > 0$ folgt daraus $\lim_{\eta \searrow y} f^{-1}(\eta) - \lim_{\eta \nearrow y} f^{-1}(\eta) < \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ bekommen wir die Existenz von $\lim_{\eta \to y} f^{-1}(\eta)$ mit $\lim_{\eta \searrow y} f^{-1}(\eta) = \lim_{\eta \to y} f^{-1}(\eta) = \lim_{\eta \nearrow y} f^{-1}(\eta)$. Aus der Stetigkeit von f in x folgt schließlich $\lim_{\eta \to y} f^{-1}(\eta) = f^{-1}(y) = x$. Damit ist f^{-1} in y stetig. ■

Beispiel 1: Die *Parabelfunktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, definiert durch $f(x) = x^2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Einschränkung $f|_{[0,\infty)}$ von f auf $[0, \infty)$ ist injektiv. Somit ist f auf $[0, \infty)$ streng monoton, genauer: streng monoton wachsend. Damit ist die *Wurzelfunktion* $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ als Umkehrfunktion von f ebenso streng monoton wachsend und stetig. ♢

Beispiel 2: Allgemeiner gilt: Für $k \geq 2$ ist die Funktion der k-ten Wurzel $\sqrt[k]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ als Umkehrfunktion der *Monomfunktion* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, wobei $f(x) = x^k$, streng monoton wachsend und stetig. ♢

Beispiel 3: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ ist stetig, injektiv und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Damit ist der Logarithmus $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ebenso stetig, injektiv und streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$. ♢

Beispiel 4: Allgemeiner gilt: Für jede Basis $a > 0$ ist die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ zur Basis a, definiert durch $\exp_a(x) := \exp(x \log(a))$, stetig, injektiv und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Damit ist der Logarithmus $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zur Basis a, definiert durch $\log_a(x) := \log(x)/\log(a)$ für $x \in (0, \infty)$, ebenso stetig, injektiv und streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$. ♢

Zur Stetigkeit von Potenzreihen.

Satz: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ besitze die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

den Konvergenzradius $r \geq 0$. Weiterhin sei $I \subset \mathbb{R}$ die Menge der Punkte, für die die Potenzreihe konvergiert. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ und $I \cap (\mathbb{R} \setminus [x_0 - r, x_0 + r]) = \emptyset$.

(b) Die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{für } x \in I$$

ist stetig auf I.

Beweis: (a): Die Potenzreihe konvergiert auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ sogar absolut, während sie auf $\mathbb{R} \setminus [x_0 - r, x_0 + r]$ divergiert. Somit ist I ein Intervall, das sich von $(x_0 - r, x_0 + r)$ höchstens in den Randpunkten $x_0 \pm r$ unterscheidet.

Fortsetzung des Beweises.

(b): O.E. betrachten wir nur den Fall $x_0 = 0$. Ansonsten setzen wir $y := x - x_0$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: Sei y_0 innerer Punkt von I, d.h. $|y_0| < r$. Dann gibt es $y_1, y_2 \in I$ mit $|y_0| < y_1 < y_2 < r$. Für $|y| \le y_1$ gilt

$$\begin{aligned} |y^n - y_0^n| &= |y - y_0| \cdot \left|y^{n-1} + y^{n-2}y_0 + \ldots + y_0^{n-1}\right| \le |y - y_0| \cdot n \cdot y_1^{n-1} \\ &= |y - y_0| \cdot \frac{n}{y_1} \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n \cdot y_2^n \le C \cdot |y - y_0| \cdot y_2^n, \end{aligned}$$

für ein $C > 0$, denn $n \cdot (y_1/y_2)^n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Damit gilt

$$|f(y) - f(y_0)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(y^n - y_0^n\right)\right| \le C \cdot |y - y_0| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot y_2^n < \infty.$$

Daraus folgt sofort $f(y) \longrightarrow f(y_0)$ für $y \to y_0$, d.h. f ist in y_0 stetig.
Damit ist die Aussage für diesen Fall bereits bewiesen.

Weitere Fortsetzung des Beweises.

Fall 2: Sei $y_0 \in I$ Randpunkt von I, wofür nur die beiden Punkte $y_0 = \pm r$ in Frage kämen. Wir behandeln hier nur den Fall $y_0 = r$. Den Fall $y_0 = -r$ beweist man analog. Falls die Potenzreihe in $y_0 = r$ konvergiert, so ist zum Nachweis der Stetigkeit von f in r die Konvergenz

$$\lim_{x \nearrow r} f(x) = \lim_{x \nearrow r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(r)$$

zu zeigen. Mit der Variablentransformation $b_n := a_n r^n$ können wir diese Konvergenzaussage reformulieren als

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dies ist die Aussage des *Abelschen Grenzwertsatzes*, den wir gleich beweisen. ■

Der Abelsche[a] Grenzwertsatz.

Satz: Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Falls die zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert, so gilt

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k + r_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \qquad \text{wobei } r_n := \sum_{k=n}^{\infty} b_k$$

Daraus folgt $r_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Daher ist die reelle Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt mit $|r_n| < C$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und für ein $C > 0$. Damit gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |r_n| x^n < C \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mit absoluter Konvergenz für alle $x \in [0, 1)$.

[a] Niels Henrik Abel (1802-1829), norwegischer Mathematiker

Fortsetzung des Beweises.

Damit gelten für $x \in (0,1)$ und wegen $r_n - r_{n+1} = b_n$ die Identitäten

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1} x^n - r_0 \\ &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1} x^n = (x-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^{n-1}\end{aligned}$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$ gilt somit

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right| &\leq (1-x) \left(\sum_{n=1}^{N-1} |r_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |r_n| x^{n-1} \right) \\ &\leq (1-x) \left(NC + \sum_{n=N}^{\infty} |r_n| x^{n-1} \right).\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Wir schätzen nun in

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right| \leq (1-x)\left(NC + \sum_{n=N}^{\infty} |r_n| x^{n-1}\right)$$

weiter nach oben ab. Zunächst gibt es wegen $r_n \longrightarrow 0$, für $n \to \infty$, zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|r_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Weiterhin setzen wir

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2CN}, 1\right\}.$$

Dann gilt für $1 - \delta < x < 1$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right| \leq \delta NC + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{\infty} x^{n-1} < \varepsilon,$$

da

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^{n-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

■

Ein Beispiel zum Abelschen Grenzwertsatz.

Beispiel: Die Funktion $f : [-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{für } x \in [-1,1)$$

ist wohldefiniert und stetig auf $[-1,1)$. Genauer gilt:

- Der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x)$ berechnen wir mit $r = 1$ (nach Anwendung der Formel von Cauchy-Hadamard). Somit konvergiert die Reihe für alle $|x| < 1$ absolut. Damit ist die Funktion f stetig auf $(-1,1)$.
- Für $x = -1$ gilt

$$\lim_{x \searrow -1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty.$$

Damit folgt die Stetigkeit von f in -1 nach dem Abelschen Grenzwertsatz aus der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe. ♢